المنهج الجديد
الطبعة الثانية
2020



للصف الثالث المتوسط

الناجح في

الرياضيات

الجزء الاول:

الفصل الاول و الفصل الثاني و الفصل الثالث

اعداد تربويين من النجف الاشرف

صفاء الكلابي & مصطفى محمد



سلسلة الناجح في الرياضيات

للتواصل زيارة صفحات السلسلة :

الفصل الاول

العلاقات والمتباينات في الاعداد الحقيقية



للتواصل زيارة صفحات السلسلة : سلسلة الناجح في الرياضيات



ترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية

تعرفنا سابقاً على مجموعة الاعداد الحقيقية وتقسم الى :-

❶ مجموعة الاعداد الطبيعية ويرمز لها بالرمز N وهي $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots \dots\}$

❷ مجموعة الاعداد الكلية ويرمز لها بالرمز W وهي $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

❸ مجموعة الاعداد الصحيحة ويرمز لها بالرمز Z وهي $Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \dots\}$

❹ مجموعة الاعداد النسبية ويرمز لها بالرمز Q وهي $N \subset W \subset Z \subset Q$

وتقسم Q الى

① مجموعة الاعداد التي يمكن جعلها على شكل كسري $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ مثل $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{7}{3}, \frac{8}{1}, \frac{1}{5}$	② مجموعة الاعداد الدورية مثل 1.161616 و 0.33333 ومجموعة الاعداد المنتهية مثل 1.5

❺ مجموعة الاعداد الغير نسبية ويرمز لها بالرمز H وتقسم الى

① مجموعة الاعداد العشرية الغير دورية ومجموعة الاعداد العشرية الغير منتهية مثل الثابت $\pi = 3.1415926535897$	② مجموعة الاعداد التي لا يمكن ايجاد جذورها مباشرتاً مثل $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt[3]{7}, \sqrt[3]{11}$

❻ مجموعة الاعداد الحقيقية ويرمز لها بالرمز R وهي $N \subset W \subset Z \subset (Q \cup H) \subset R$

خواص الجذور التربيعية $\sqrt{a}$

❶ $\sqrt{10} = \sqrt{5 \times 2} = \sqrt{5} \times \sqrt{2}$	❶ $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
❷ $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$	❷ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $b \neq 0$
❸ $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$	❸ $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$
❹ $\sqrt[2]{3^5} = 3^{\frac{5}{2}}$	❹ $\sqrt[2]{a^n} = a^{\frac{n}{2}}$ 2 قوة الجذر و n اس العدد تحت الجذر

بعض الجذور التربيعية المباشرة

$\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$,
$\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{49} = 7$, $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{100} = 10$

خواص الجذور التكعيبية $\sqrt[3]{a}$

❶ $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \times 2} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$	❶ $\sqrt[3]{a \times b} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
❷ $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$	❷ $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad , \quad b \neq 0$
❸ $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \times 9} = \sqrt[3]{27} = 3$	❸ $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = a$
❹ $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$	❹ $\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$
❺ $\sqrt[3]{3^5} = 3^{\frac{5}{3}}$	❺ $\sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$

بعض الجذور التكعيبية المباشرة

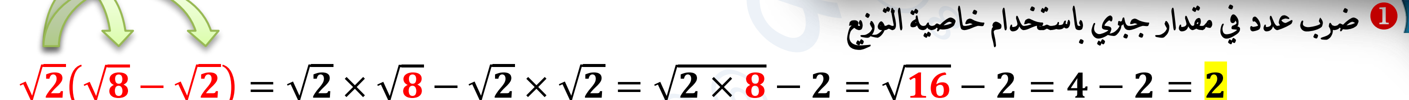
$\sqrt[3]{0} = 0 \ , \ \sqrt[3]{1} = 1 \ , \ \sqrt[3]{8} = 2 \ , \ \sqrt[3]{27} = 3 \ , \ \sqrt[3]{64} = 4 \ ,$
$\sqrt[3]{125} = 5 \ , \ \sqrt[3]{216} = 6 \ , \ \sqrt[3]{343} = 7$

قواعد اساسية في تبسيط الجمل العددية

❶ ضرب عدد في مقدار جبري باستخدام خاصية التوزيع

$$\sqrt{2}(\sqrt{8} - \sqrt{2}) = \sqrt{2} \times \sqrt{8} - \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \sqrt{2 \times 8} - 2 = \sqrt{16} - 2 = 4 - 2 = 2$$

❷ ضرب مقدار جبري في مقدار جبري باستخدام خاصية التوزيع



$$(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{8}) = \sqrt{5} \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times \sqrt{8} + \sqrt{2} \times \sqrt{5} - \sqrt{2} \times \sqrt{8}$$
$$= 5 - \sqrt{5 \times 8} + \sqrt{2 \times 5} - \sqrt{2 \times 8} = 5 - \sqrt{40} + \sqrt{10} - \sqrt{16}$$
$$= 5 - 2\sqrt{10} + \sqrt{10} - 4 = 1 - \sqrt{10}$$



❸ فتح مربع حدانية (المربع الكامل) باستخدام القانون

$(a \pm b)^2 = (\text{الاول})^2 \pm 2(\text{الاول})(\text{الثاني}) + (\text{الثاني})^2$

اشارة الحد الوسط — دائماً موجب

$$(a \pm b)^2 = (a)^2 \pm 2(a)(b) + (b)^2$$
$$(x - 4)^2 = (x)^2 - 2(x)(4) + (4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

❹ تحليل الفرق بين مربعين

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

ملاحظة / يجب ان تكون اشارة الحد الوسط سالبة وليس من الضروري ان يكون الحد الاول والحد الثاني مربعاً كاملاً (يعني اس الحد تربيع)

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$
$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

مثال1 بسط الجمل العددية الاتية باستعمال ترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية

❶ $(\sqrt{12}-\sqrt{18})(\sqrt{12}+\sqrt{18}) = (\sqrt{12})^2-(\sqrt{18})^2$
$= 12-18 = -6$

❷ $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})$
$= \sqrt{2}\times\sqrt{5}+\sqrt{2}\times\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{5}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}$
$= \sqrt{2\times5}+\sqrt{2\times3}-\sqrt{3\times5}-3$
$= \sqrt{10}+\sqrt{6}-\sqrt{15}-3$

ملاحظة 1 / اذا كانت الاقواس متشابهة واشارة الوسط مختلفة مباشرةً نختار احد الاقواس نربع الحد الاول ونضع اشارة سالبة في الوسط ونربع الحد الثاني كما في مثال ❶

ملاحظة 2/ اذا كانت الاقواس مختلفة والحدود مختلفة نستخدم خاصية التوزيع كما في مثال ❷

❸ $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) =$..........H.W **Ans=2**

❹ $(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) =$.............H.W **Ans=$2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2+\sqrt{6}$**

❺ $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2 = (\sqrt{7})^2-2\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2$
$= 7-2\sqrt{7\times2}+2 = 9-2\sqrt{14}$

باستخدام مربع حدانية

❻ $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5}) = (\sqrt{3}+\sqrt{5})^2 = (\sqrt{3})^2+2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2$
$= 3+2\sqrt{3\times5}+5 = 8+2\sqrt{15}$

❼ $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2 =$........H.W **Ans=$11+2\sqrt{30}$**

مثال2 بسط الجمل العددية الاتية باستعمال ترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية

❶ $(\sqrt{125}-\sqrt{20})\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right) = (5\sqrt{5}-2\sqrt{5})\left(\frac{2}{3}\right) = 3\sqrt{5}\left(\frac{2}{3}\right) = 2\sqrt{5}$

نحلل دواخل الجذور الغير مباشرة الى عواملها الاولية

❷ $(\sqrt{18}-\sqrt{50})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}\right) =$.......H.W **Ans=$\frac{3\sqrt{2}}{2}$**

❸ $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\div\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right)$
$= \left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\div\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)$
$= \left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\right)$
$= \left(\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\right)\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\right)$
$= \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\times\frac{3\sqrt{3}}{-(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})} = -1$

$3\sqrt{2}-2\sqrt{3} = -(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$

125	5
25	5
5	5
1	

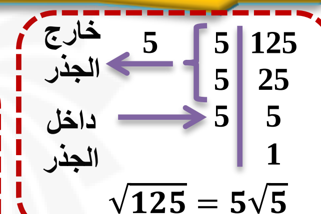
خارج الجذر 5 ، داخل الجذر 5
$\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

20	5
4	2
2	2
1	

داخل الجذر 5 ، خارج الجذر 2
$\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

50	5
10	5
2	2
1	

خارج الجذر 5 ، داخل الجذر 2
$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$



27	3
9	3
3	3
1	

خارج الجذر 3 ، داخل الجذر 3
$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

❺ $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}} =$..........H.W Ans$=\frac{\sqrt{3}}{15}$

بعض الجذور التربيعية الغير مباشرة

$\sqrt{2} \simeq 1.4$, $\sqrt{3} \simeq 1.7$, $\sqrt{5} \simeq 2.2$, $\sqrt{6} \simeq 2.4$,
$\sqrt{7} \simeq 2.6$, $\sqrt{8} \simeq 2.8$, $\sqrt{11} \simeq 3.3$, $\sqrt{13} \simeq 3.6$

مثال3 بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات واكتب الناتج لأقرب عشرة

❶ $\sqrt{12}(\sqrt{3}-\sqrt{8})-6 = \sqrt{12}\times\sqrt{3}-\sqrt{12}\times\sqrt{8}-6$
$= 2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times2\sqrt{2}-6$
$= 2\times3-4\sqrt{3\times2}-6$
$= 6-4\sqrt{6}-6 = -4\sqrt{6} \simeq -4\times2.4 \approx -9.6$

12	2	2 ← خارج الجذر
6	2	
3	3	→ داخل الجذر
1		

$\sqrt{12} = 3\sqrt{2}$

❷ $\sqrt{7}(\sqrt{28}-\sqrt{2}) =$......H.W Ans$\approx 10.36$

❸ $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}\sqrt{28}\right) = \sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}(2\sqrt{7})\right)$
$= -3\left(\frac{\sqrt{7}}{9}-\frac{2\sqrt{7}}{9}\right)$
$= -3\left(\frac{\sqrt{7}-2\sqrt{7}}{9}\right) = -3\left(\frac{-\sqrt{7}}{3\,9}\right)$
$= \frac{\sqrt{7}}{3} \approx \frac{2.6}{3} \approx 0.9$

$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

$-(-\sqrt{7}) = \sqrt{7}$

$\sqrt{7} \approx 2.6$

28	2	2 ← خارج الجذر
14	2	
7	7	→ داخل الجذر
1		

$\sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

❹ $(-125)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{12}\right) = \sqrt[3]{-125}\left(\frac{\sqrt{3}}{10}-\frac{2\sqrt{3}}{2\,4}\right)$
$= -5\left(\frac{\sqrt{3}}{10}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5\left(\frac{\sqrt{3}-5\sqrt{3}}{10}\right)$
$= -5\left(\frac{-4\sqrt{3}}{10}\right) = \frac{{}^{2}20\sqrt{3}}{10} = 2\sqrt{3}$
$\approx 2\times(1.7) \approx 3.4$

$(-125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-125} = -5$

$\sqrt{3} \approx 1.7$

ملاحظة عند تحليل الجذور الغير مباشره الى عواملها الاولية : هي الاعداد التي لا تقبل القسمة الا على نفسها والواحد ما عدى الواحد مثل ... ... $2, 3, 5, 7, 11,$

❶ في الجذور التربيعية : نأخذ من كل عاملين اوليين متشابهين عامل واحد نضعه خارج الجذر والعامل المختلف يبقى داخل الجذر .

❷ في الجذور التكعيبية : نأخذ من كل ثلاث عوامل اولية متشابهة عامل واحد نضعه خارج الجذر والعامل المختلف يبقى داخل الجذر .

⑤ $5\sqrt{\frac{3}{15}}+2\sqrt{\frac{4}{5}}-5\sqrt{\frac{1}{125}}=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{15}}+\frac{2\sqrt{4}}{\sqrt{5}}-\frac{5\sqrt{1}}{\sqrt{125}}$

$\sqrt{15}=\sqrt{5}\times\sqrt{3}$

$=\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}+\frac{2\times2}{\sqrt{5}}-\frac{5(1)}{5\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$=\frac{5+4-1}{\sqrt{5}}\approx\frac{8}{2.2}\approx 3.6$

⑥ $7\sqrt{\frac{2}{49}}-3\sqrt{\frac{8}{81}}+\sqrt{\frac{18}{36}}\approx$......H.W

Ans $\simeq 1.18$

خارج الجذر ← 5	5	125
	5	25
داخل الجذر →	5	5
		1

$\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

خارج الجذر ← 2	2	24
	2	12
	2	6
	3	3
		1

$\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

مثال4 بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية

① $\frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=\frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$\frac{7\times\sqrt{5}-\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}-5}{5}$

$\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$

اذا كان مقام الكسر يحتوي على جذر نتخلص من الجذر بضرب البسط والمقام بنفس الجذر (العامل المنسب)

② $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$\frac{1\times\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{4\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-3}{4\times3}=\frac{\sqrt{3}-3}{12}$

③ $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}}=$......H.W

Ans= $\frac{\sqrt{5}-10}{5}$

مثال5 بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الاعداد الحقيقية

① $\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}$

$\sqrt{21}=\sqrt{7}\times\sqrt{3}$

$=\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}}\times\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}$

مرافق المقدار الجبري $2\sqrt{3}+\sqrt{7}$ هو $2\sqrt{3}-\sqrt{7}$

$=\frac{2\times3\times\sqrt{7}+7\times\sqrt{3}}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}=\frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{4(3)-7}$

$=\frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{12-7}=\frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{5}$

في هذا المثال نتخلص من الجذور بالمقام بضرب البسط والمقام بنفس الجذور ولكن عكس اشارة الوسط (العامل المنسب)

② $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{7}-3\sqrt{5})^2}{(\sqrt{7})^2-(3\sqrt{5})^2}$

$=\frac{(\sqrt{7})^2-2\times\sqrt{7}\times3\sqrt{5}+(3\sqrt{5})^2}{7-9(5)}=\frac{7-6\sqrt{7\times5}+9(5)}{7-45}$

$=\frac{7-6\sqrt{35}+45}{-38}=\frac{52-6\sqrt{35}}{-38}=\frac{2(26-3\sqrt{35})}{-38}=\frac{26-3\sqrt{35}}{-19}$



❸ $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = ...H.W$ Ans= $\frac{7+2\sqrt{10}}{3}$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

❹ $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$

$= \frac{5\sqrt{2}\times\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}} - \frac{10\times\sqrt{6}-\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}-3}{2(3)} - \frac{10\sqrt{6}-6}{2(6)}$

$= \frac{5\sqrt{6}-3}{6} - \frac{2(5\sqrt{6}-3)}{12} = \frac{5\sqrt{6}-3}{6} - \frac{5\sqrt{6}-3}{6} = 0$

$$\sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$$

❺ $\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}} - \frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{11}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}} - \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}$

$\sqrt{33} = \sqrt{3\times11} = \sqrt{3}\times\sqrt{11}$

$\sqrt{11}\sqrt{3} - \sqrt{11} = \sqrt{11}(\sqrt{3}-1)$

$= \frac{\sqrt{11}(\sqrt{3}-1)}{3\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{5}(2\sqrt{3}-1)}{5\sqrt{5}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{2\sqrt{3}-1}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{2\sqrt{3}-1}{5\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$= \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-1\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{2(3)-\sqrt{3}}{5(3)} = \frac{\sqrt{3}-1}{3} - \frac{6-\sqrt{3}}{15}$

نوحد المقامات

$= \frac{5(\sqrt{3}-1)-(6-\sqrt{3})}{15} = \frac{5\sqrt{3}-5-6+\sqrt{3}}{15} = \frac{6\sqrt{3}-11}{15}$

❻ $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{\sqrt{28}} = ...H.W$ Ans= $\frac{\sqrt{35}-7}{14}$

بعض خواص الأسس المهمة

❶ اذا تساوت الاساسات عند الضرب تجمع الاسس $a^n \times a^m = a^{n+m}$, $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

❷ اذا تساوت الاساسات عند القسمة تطرح الاسس $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

❸ عند الرفع تضرب الاسس $(a^n)^m = a^{n\times m}$, $(2^3)^2 = 2^{3\times2} = 2^6$

❹ اذا كان العدد في البسط واسهُ سالب ننزلهُ الى المقام ليصبح اسهُ موجباً $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$, $2^{-3} = \frac{2}{2^3}$

❺ اذا كان العدد في المقام واسهُ سالب نرفعهُ الى البسط ليصبح اسهُ موجباً $\frac{1}{a^{-3}} = a^3$, $\frac{1}{2^{-5}} = 2^5$

مثال6 استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً الى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة

❶ $9^{\frac{-3}{2}} = (3^2)^{\frac{-3}{2}} = 3^{2\times\frac{-3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \simeq 0.04$

عند الرفع تضرب الاسس في ❶

$2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

❷ $(\sqrt{7})^2 \simeq ....H.W$



③ $2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{-3}{2}} = 2^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-\frac{-3}{2}} = 2^{\frac{10+2-9}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \simeq 1.41$

عند الضرب تجمع الاسس في ③

④ $5^2 \div 5^{\frac{3}{2}} \simeq$........H.W Ans $\simeq 2.24$

⑤ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^{-2} - 3^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1^2}{2^2}\right) + \frac{1}{3^2} - \sqrt{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \sqrt{8}$

$\simeq 0.25 + 0.11 - 2.83 \simeq -2.47$

$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$

⑥ $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^{-3} - 3^{\frac{3}{2}} \simeq$.......H.W Ans $\simeq -5.04$

مثال7 استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً الى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة

❶ $8^{\frac{1}{3}} - (-8)^0 + 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + 9 \times \sqrt{3}$

$= 2 - 1 + 9\sqrt{3} \simeq 1 + 9(1.73) \simeq 1 + 15.57 \simeq 16.57$

أي عدد اسه صفر يساوي واحد في ❶

❷ $(27)^{\frac{1}{3}} - (-9)^0 + 3^2 \times 5^{\frac{1}{2}} \simeq$......H.W Ans $\simeq 22.12$

❸ $\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + (121)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq$........H.W Ans $\simeq 2.86$

نستخدم فرق بين مربعين في ⑤

مثال8 استعمل العمليات واكتب الناتج مقرباً الى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة

ملاحظة: عند تحريك الفارزة الى جهة اليسار نظيف اس موجب و اذا تحركت الى اليمين نظيف اس سالب. وتكون الإضافة بقدر عدد المراتب التي تحركت بها الفارزة ($10^{\text{عدد المراتب}}$) يمين ⟵ (−) ، يسار ⟵ (+)

❶ $7.6 \times 10^{-4} - 0.4135 \times 10^{-3} = 7.6 \times 10^{-4} - 4.135 \times 10^{-4}$ هنا تحركت الفارزة الى اليسار مرتبة واحدة

$= (7.6 - 4.135) \times 10^{-4} = 3.47 \times 10^{-4}$

هنا نستخدم الحاسبة

❷ $6.43 \times 10^{-5} - 0.25 \times 10^{-3} =$......H.W Ans $\simeq 1.57 \times 10^{-5}$

❸ $0.052 \times 10^4 + 7.13 \times 10^2 = 5.2 \times 10^2 + 7.13 \times 10^2$

$= (5.2 + 7.13) \times 10^2 = 12.33 \times 10^2 = 1.233 \times 10^3$

❹ $(7.83 \times 10^{-5})^2 = (7.83)^2 \times (10^{-5})^2 = 61.3089 \times 10^{-10} = 6.13089 \times 10^{-9}$

❺ $(9.23 \times 10^{-3})^2 =$.......H.W Ans $\simeq 8.52 \times 10^{-5}$

❻ $4.86 \times 10^2 \div 0.55 \times 10^5 = \frac{4.86 \times 10^2}{0.55 \times 10^5} = \frac{4.86 \times 10^2 \times 10^{-5}}{0.55} = 8.84 \times 10^{-3}$

❼ $6.25 \times 10^3 \div 0.015 \times 10^6 =$.......H.W Ans $\simeq 4.16 \times 10^{11}$



مسائل حياتية

❶ **الزلازل** : يعد زلزال تسونامي الذي حدث في اليابان من اقوى الزلازل التي حدثت على مر العصور و يحسب سرعة التسونامي بالقانون $v = \sqrt{9.6d}$ متر بالثانية حيث d تمثل عمق المياه .

ما سرعة التسونامي التقريبية اذا كان عمق المياه 1000 متر ؟

Sol $v = \sqrt{9.6d}$ $\quad d = 1000$

$$v = \sqrt{9.6 \times 1000} = \sqrt{9600} \simeq 98m/sec$$



❷ **الاقمار الاصطناعية** : يستعمل القمر الصناعي بصفة اساسية في الاتصالات مثل اشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع انحاء العالم والتنبؤ في الطقس وتعقب الاعاصير ، اذ تدور هذه الاقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الارض، وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية $v = \sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}\, m/sec$ و اذ r تمثل نصف قطر المدار (بعد القمر عن مركز الارض) .

ما سرعة القمر اذا كان نصف قطر المدار $300km$ ؟

Sol $v = \sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}$

$$r = 300km \Longrightarrow r = 300km \times 1000m = 300000m = 3 \times 10^5 m$$

$$v = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{3 \times 10^5}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14-5}}{3}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^9}{3}} = \sqrt{\frac{40 \times 10^8}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{40}{3} \times 10^8} = \sqrt{\frac{40}{3}} \times 10^4$$

$$v \simeq 3.65 \times 10^4\ m\backslash sec$$

$$\sqrt{10^8} = (10^8)^{\frac{1}{2}} = 10^4$$



❸ **مكافحة الحرائق** : تحسب سرعة تدفق الماء الذي يضخ من سيارات الحريق بقانون

$v = \sqrt{2hg}\ foot/sec$ حيث h تمثل اقصى ارتفاع للماء و g تمثل التعجيل الارضي

$(32foot/sec^2)$ لإطفاء الحريق في الغابات تحتاج ادارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني الى مضخة

لتضخ الماء الى ارتفاع $(80foot)$. فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة $(72foot/sec)$



سوف نحل السؤال بطريقتين\ بطريقة ايجاد السرعة وبطريقة ايجاد الارتفاع

❶ $v = \sqrt{2hg}$

$v = \sqrt{2 \times 80 \times 32} = \sqrt{5120} \simeq 71.55$

اذن المضخة التي سرعتها $(72foot/sec)$ تكفي لإخماد الحريق

❷ $v = \sqrt{2hg} \Rightarrow 72 = \sqrt{2 \times h \times 32}$

$72 = \sqrt{64h} \xRightarrow{\text{نبسط}} 72 = 8\sqrt{h}$

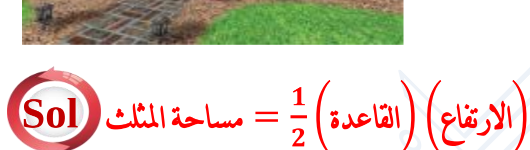
$\sqrt{h} = \frac{72}{8} \Rightarrow \sqrt{h} = 9 \xRightarrow{\text{تربيع الطرفين}} h = 81m$

اذن ارتفاع المضخة يصل الى ارتفاع البناية



❹ جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة البيت اذا كان ارتفاعه $\sqrt{18} - \sqrt{3}$

وطول قاعدته $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$



Sol مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ (القاعدة) (الارتفاع)

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{18} - \sqrt{3})$

$= \frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$ ← فرق بين مربعين

$= \frac{1}{2}\left((3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2\right)$

نربع الحد الاول ونضع اشارة سالبة في الوسط ثم نربع الحد الثاني

$= \frac{1}{2}(9(2) - 3)$

$= \frac{1}{2}(18 - 3) = \frac{1}{2}(15) = 7.5m^2$ مساحة المثلث

ملاحظة / تحليل الفرق او مجموع بين مكعبين $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

عكس الاشارة — نفس الاشارة — دائماً موجب




تحدِ : اثبت صحة ما يأتي :

باستخدام الفرق بين مكعبين

$\left(7^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}}+7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\right)=2$

Sol الطرف الايسر $=\left(7^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}}+7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\right)=\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3=7^{\frac{1}{3}\times 3}-5^{\frac{1}{3}\times 3}=7-5=2$

الطرف الايمن $=2$

∴ الطرف الايمن = الطرف الايسر



أصحح الخطأ : كتب شاكر ناتج جمع العددين كالاتي : $8.4\times 10^{-3}+0.52\times 10^{-2}=1.36\times 10^{-3}$

حدد خطأ شاكر ثم صححه

Sol $8.4\times 10^{-3}+0.52\times 10^{-2}=0.84\times 10^{-2}+0.52\times 10^{-2}$

$=1.36\times 10^{-2}$

1.36×10^{-3}

1.36×10^{-2} ✓



حس عددي : هل ان العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

Sol $\sqrt{125}=5\sqrt{5}\simeq 5(2.23)\simeq 11.18$

10.28 , 11.18 , 11.28

نعم $\sqrt{125}$ يقع بين العددين



أكتب : ناتج الجمع بالتقريب لأقرب عشرة $6^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{3}{2}}\simeq \cdots$

Sol $6^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{6^3}+\sqrt{5^3}=\sqrt{216}+\sqrt{125}=6\sqrt{6}+5\sqrt{5}$

$\simeq 6(2.4)+5(2.2)\simeq 14.4+11\simeq 25$



216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3

2 خارج الجذر

6 داخل الجذر

3 خارج الجذر

$\sqrt{216}=6\sqrt{6}$

الاختيار من متعدد Multiple Choice

الدرس [1-1] ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية
Ordering Operations in Real Numbers

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1. $(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7}) = ...$
   a) $2+9\sqrt{7}$ b) $2+9\sqrt{2}$ ✓ c) $9+2\sqrt{14}$ d) $2+9\sqrt{14}$

2. $(\sqrt{18}-\sqrt{8})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{125}}\right) = ...$
   a) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ ✓ b) $\frac{-3\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{-2\sqrt{3}}{5}$

3. $\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}} \div \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = ...$
   ✓ a) $\frac{-5}{2}$ b) $\frac{-2}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

4. $\sqrt{8}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) - 3\sqrt{6} = ...$
   a) $5-4\sqrt{6}$ b) $5+4\sqrt{6}$ ✓ c) $4-5\sqrt{6}$ d) $4+5\sqrt{6}$

5. $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{32}\right) = ...$
   a) $\frac{-5}{\sqrt{2}}$ ✓ b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

6. $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = ...$
   a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ c) 1 ✓ d) -1

7. $\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = ...$
   a) $5+6\sqrt{2}$ b) $5-6\sqrt{2}$ ✓ c) $2\sqrt{6}-5$ d) $2\sqrt{6}+5$

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

8. $(\frac{1}{3})^2 - 3^{-2} - (5)^{\frac{3}{2}} \approx ...$
   a) -18.11 b) 18.11 c) 11.18 ✓ d) -11.18

9. $8^{\frac{-1}{3}} - (-7)^0 + \frac{1}{6} \times 4^{\frac{1}{2}} \approx ....$
   ✓ a) -0.16 b) -0.17 c) 0.16 d) 0.17

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

10. $(7.46 \times 10^{-2})^2 \approx ....$
    a) 5.56×10^{-5} b) 5.57×10^{-4} c) 5.56×10^{-4} ✓ d) 5.57×10^{-3}







تعرفنا سابقاً على العلاقات التي تتكون من المجموعة x الى المجموعة y عن طريق الازواج المرتبة (x, y) .

في هذا الدرس سنتعرف على العلاقات التي تمثل تطبيقاً وحسب التعريف التالي

التطبيق لتكن $R : X \rightarrow y$ (علاقة من x الى y) تكون هذه العلاقة تطبيق اذا كان كل عنصر في x يرتبط بصورة واحدة فقط في y

مجال التطبيق هو جميع عناصر المجموعة x .

المجال المقابل للتطبيق هو جميع عناصر المجموعة y .

مدى التطبيق هو مجموعة كل الصور في المجال المقابل (يعني كل عنصر من x له صورة في y هذه الصور تسمى مدى التطبيق)

قاعدة الاقتران هي القاعدة التي تنقل العنصر من المجال الى صورته في المجال المقابل ، ويرمز لها بالرمز .

$R(x) = y$, $f(x) = y$, $g(x) = y$

ملاحظات

❶ العلاقة لا تمثل تطبيقاً اذا وجد عنصر في المجال x لم يرتبط باي عنصر من المجال المقابل y ،
او وجد عنصر في x يرتبط بعنصرين او اكثر في y .

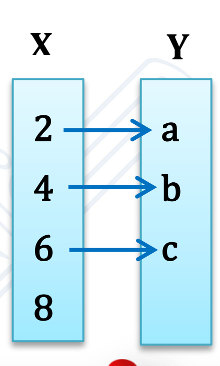
❷ المدى مجموعة جزئية من المجال المقابل .

❸ شرط التطبيق :- كل عنصر من المجال x يرتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل y .

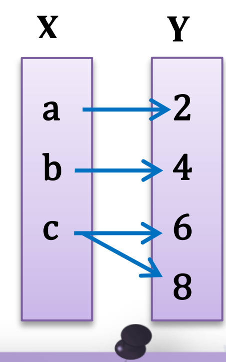
❹ الزوج المرتب (a, b) المسقط الاول ينتمي للمجال x والمسقط الثاني ينتمي للمجال المقابل y .

مسقط ثاني مسقط اول

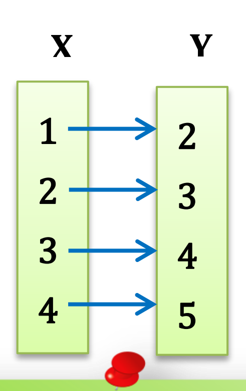
مثال 1 بين العلاقات الاتية هل تمثل تطبيق مع ذكر السبب



لا تمثل العلاقة تطبيق لان يوجد عنصر من المجال X ليس له صورة في المجال المقابل Y



لا تمثل العلاقة تطبيق لان يوجد عنصر من المجال X له صورتين في المجال المقابل Y



نعم العلاقة تمثل تطبيق لان كل عنصر من المجال X له صورة وحيدة في المجال المقابل Y

مثال 2

اذا كانت $F: X \rightarrow Y$ تمثل تطبيق بقاعدة الاقتران $y = \frac{1}{2}x$ من المجموعة $X = \{4, 6, 8\}$ الى المجموعة $Y = \{2, 3, 4, 5\}$

❶ اكتب التطبيق على شكل مجموعة ازواج مرتبة ❷ مثل التطبيق بمخطط سهمي ❸ اكتب المجال ❹ جد المدى



❶ $Y = f(x) = \frac{1}{2}x$

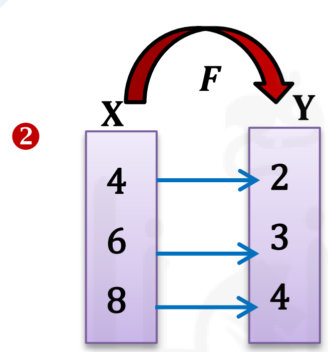
$f(4) = \frac{1}{2}(4) = 2$

$f(6) = \frac{1}{2}(6) = 3$

$f(8) = \frac{1}{2}(8) = 4$

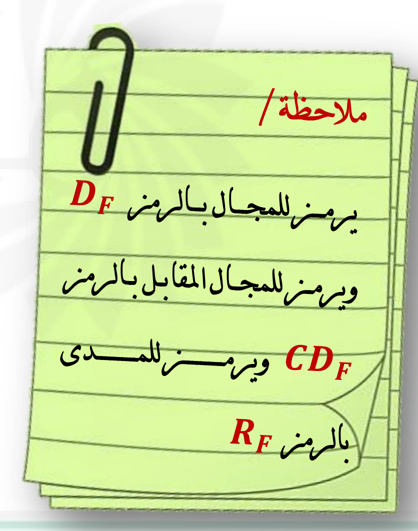
$F = \{(4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$

❷



❸ المجال $= D_F = X = \{4, 6, 8\}$

❹ المدى $= R_F = \{2, 3, 4\}$



ملاحظة/ يرمز للمجال بالرمز D_F ويرمز للمجال المقابل بالرمز CD_F ويرمز للمدى بالرمز R_F

مثال 3 الجدول التالي يمثل العلاقة بين وزن السمك بالكيلوغرام وسعر السمك بالدينار ، هل تمثل العلاقة تطبيقاً ؟ اذا كانت تطبيقاً فاكتب قاعدة الاقتران وحدد المجال والمدى



السعر/دينار Y	الوزن/كغم X
2	1
4	2
6	3
8	4

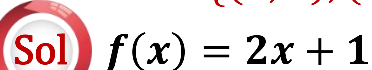
Sol

نعم تمثل تطبيق لان كل عنصر في X يرتبط بعنصر واحد في Y

قاعدة الاقتران $y = 2x \quad or \quad f(x) = 2x$

المجال $= D = \{1, 2, 3, 4\}$

المدى $= R = \{2, 4, 6, 8\}$



مثال 4 اكتب قاعدة الاقتران للتطبيق ومثله بمخطط سهمي ثم اكتب المجال والمدى للتطبيق

❶ $F = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$

Sol $f(x) = 2x + 1$

المجال $= D_F = \{1, 2, 3, 4\}$

المدى $= R_F = \{3, 5, 7, 9\}$

X	Y
1 →	3
2 →	5
3 →	7
4 →	9

❷ $g = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$ H.W



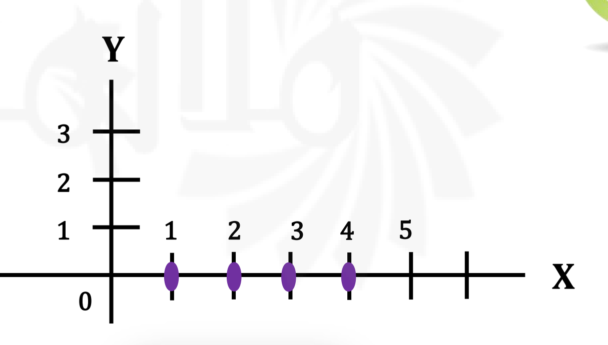
مثال 5 اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثلها بالمستوي الاحداثي واكتب المجال والمدى

Sol ❶ $F = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\}$

$f(x) = 0$

المجال $= D_F = \{1, 2, 3, 4\}$

المدى $= R_F = \{3, 5, 7, 9\}$



❷ $g = \{(0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$ H.W

انواع التطبيقات



اولاً التطبيق الشامل

يكون التطبيق $F: X \to Y$ شامل اذا كان كل عنصر من عناصر Y هو صورة لعنصر واحد او اكثر من عناصر X .

بصورة ابسط
المدى = المجال المقابل

مثال 1 بين هل التطبيقات الاتية تمثل تطبيقاً شاملاً ام لا ؟

X	Y
1 →	2
2 →	3
3 →	4
	5

التطبيق غير شامل لان
المدى ≠ المجال المقابل

X	Y
1 →	1
2 →	2
3 →	3
4 →	4

نعم التطبيق شامل لان
المدى = المجال المقابل

ملاحظة

يكون التطبيق غير شامل اذا وجد عنصر من عناصر المجال المقابل Y لم يرتبط باي عنصر من عناصر المجال X

ثانياً التطبيق المتباين

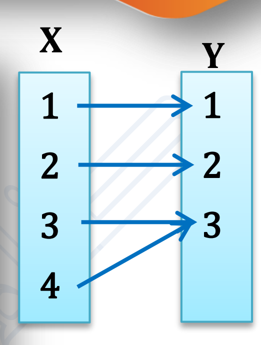
يكون التطبيق $F: X \to Y$ تطبيقاً متباينا اذا كان كل عنصرين بالمجال لهما صورتان مختلفتان بالمجال المقابل . $\forall x_1, x_2 \in X; x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

بصورة ابسط
للعناصر المختلفة صور مختلفة

ملاحظة

يكون التطبيق غير متباين اذا وجد عنصران مختلفان من عناصر المجال X لهما نفس الصورة في المجال المقابل Y

مثال 2 بين هل التطبيقات الاتية تمثل تطبيقاً متبايناً ام لا

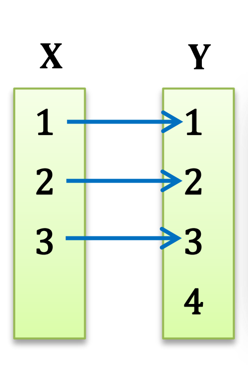


التطبيق غير متباين لان يوجد عنصرين في المجال لهما نفس الصورة في المجال المقابل

$$3 \neq 4 \rightarrow f(3) = f(4)$$
$$3 = 4$$

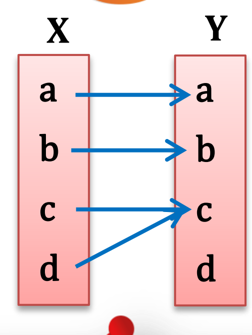
التطبيق متباين

لان للعناصر المختلفة صور مختلفة



ثالثاً **التطبيق المتقابل** يكون التطبيق متقابل اذا كان تطبيقاً شاملاً ومتبايناً في آنٍ واحد .

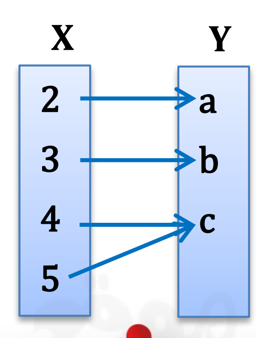
مثال 3 بين هل التطبيقات الاتية تمثل تطبيقاً متقابلاً ام لا



التطبيق غير شامل

التطبيق غير متباين

∴ التطبيق غير متقابل لان غير متباين وغير شامل



التطبيق شامل

التطبيق غير متباين

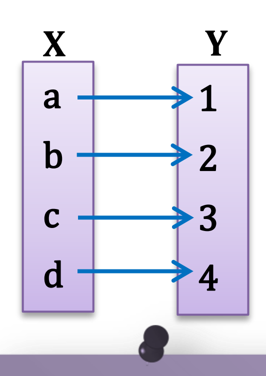
∴ التطبيق غير متقابل لان غير متباين

X: a , b , c → Y: 1 , 2 , 3 , 4

التطبيق غير شامل

التطبيق متباين

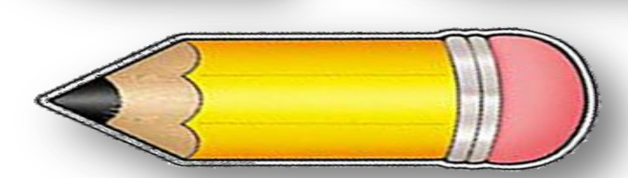
∴ التطبيق غير متقابل لان غير شامل



التطبيق شامل

التطبيق متباين

∴ التطبيق متقابل



مثال4 اذا كان $F: N \rightarrow N$ وكانت $f(x) = 3x + 2$ ، بين هل التطبيق شامل ام لا .

Sol $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\}$

$f(x) = 3x + 2$

$f(1) = 3(1) + 2 = 3 + 2 = 5$

$f(2) = 3(2) + 2 = 6 + 2 = 8$

$f(3) = 3(3) + 2 = 9 + 2 = 11$

المدى= $R_F = \{5, 8, 11, \ldots\ldots\ldots\}$

اذا كان المجال مجموعة غير منتهية مثل

N, R, Z, Q

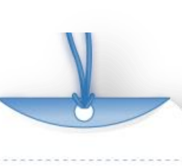
نكتفي بأخذ ثلاث عناصر من المجموعة

ونعوضها بقاعدة الاقتران

نكتب مجموعة الاعداد الطبيعية N ثم

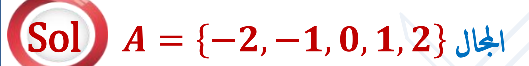
نعوض عناصر المجال N في قاعدة الاقتران

وناتج التعويض هو المدى R_F



∵ المدى ≠ المجال المقابل

∴ التطبيق غير شامل



مثال 5 اذا كان $F: A \rightarrow Z$ حيث $f(x) = x^2$ وكانت $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ، ارسم المخطط السهمي

و اكتب الازواج المرتبة للتطبيق ومثله بيانياً في المستوي الاحداثي وبين هل التطبيق متباين او لا ؟

Sol المجال $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

المجال المقابل $Z = \{0, \mp1, \mp2, \mp3, \ldots\ldots\}$

$f(x) = x^2$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

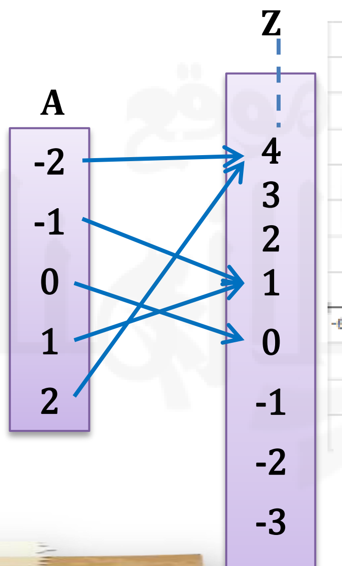
$f(-1) = (-1)^2 = 1$

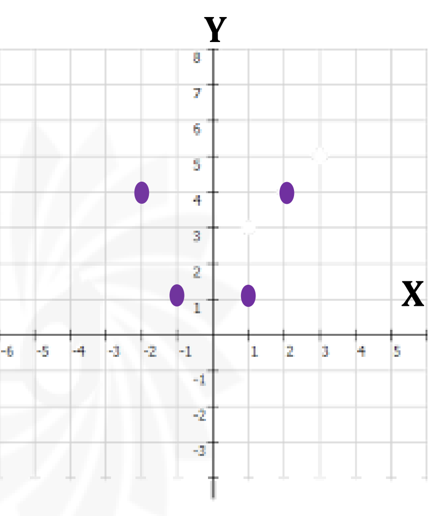
$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

$F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$





التطبيق غير متباين لان يوجد عنصرين في المجال مختلفين لهما نفس

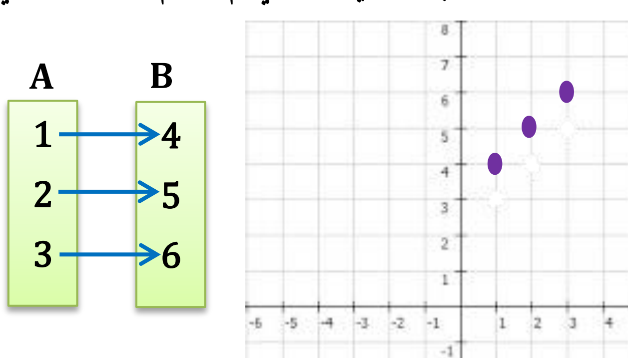
الصورة في المجال المقابل ، $-2 \neq 2 \rightarrow f(-2) = f(2)$

مثال6 اذا كان $A = \{1,2,3\}$ و $B = \{4,5,6\}$ وكانت $F: A \to B$ تطبيقاً معرفاً كالاتي

$F = \{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ مثل التطبيق في المستوي الاحداثي ثم ارسم المخطط السهمي وبين نوعه .

نوع التطبيق
❶ التطبيق شامل
❷ التطبيق متباين
❸ التطبيق تقابل





مثال7 اذا كانت $X = \{1,2,3\}$ و $Y = \{1,4,9,16\}$ والتطبيق $R: X \to Y$ معرفاً كالاتي

$R = \{(1,4),(2,4),(3,9)\}$ ارسم المخطط السهمي للتطبيق وبين نوعه .

H.W

مثال8 اذا كان $F: Z \to Z$ حيث $f(x) = 2x^2 - 3$ ارسم المخطط السهمي ثم بين نوع التطبيق .

مجموعة الاعداد الصحيحة Z
تمثل المجال والمجال المقابل في هذا المثال

Sol

$Z = \{0, \mp1, \mp2, \mp3, \dots\}$

$f(x) = 2x^2 - 3$

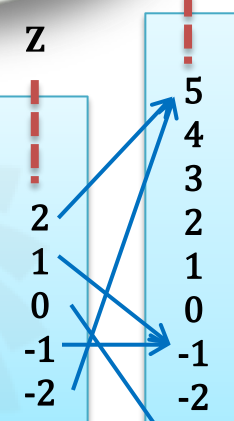
$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 2(4) - 3 = 8 - 3 = 5$

$f(-1) = 2(-1)^2 - 3 = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(0) = 2(0)^2 - 3 = 2(0) - 3 = 0 - 3 = -3$

$f(1) = 2(1)^2 - 3 = 2(1) - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(2) = 2(2)^2 - 3 = 2(4) - 3 = 8 - 3 = 5$



نوع التطبيق

❶ التطبيق غير شامل \ لان المدى ≠ المجال المقابل

❷ التطبيق غير متباين \ لان $f(-1) = f(1) \quad -1 \neq 1 \to$

❸ التطبيق غير تقابل \ لان غير شامل وغير متقابل

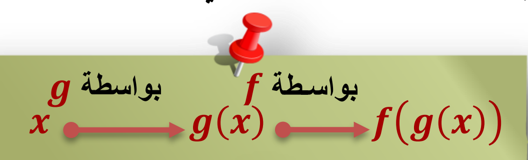


تركيب التطبيقات

اذا كان $f(x)$, $g(x)$ تطبيقات معلومة ، سوف نتعلم كيفية ايجاد دالة جديدة تسمى (تركيب التطبيق) وهي

اولاً الدالة $(fOg)(x) = f(g(x))$ وتقرأ f تركيب g

وهي ناتجة من ايجاد $g(x)$ اولاً ثم ايجاد صورتها في الدالة f .



ثانياً الدالة $(gOf)(x) = g(f(x))$ وتقرأ g تركيب f

وهي ناتجة من ايجاد $f(x)$ ثم ايجاد صورتها في الدالة g .

بواسطة f بواسطة g
$x \to f(x) \to g(f(x))$

مثال1 ليكن $f: N \to N$ حيث $f(x) = x^2$ وان $g: N \to N$ حيث $g(x) = 3x + 1$

جد ❶ $(fOg)(x)$ ❷ $(fOg)(2)$ ❸ $(gOf)(x)$ ❹ $(gOf)(5)$

Sol

نعوض في القوس قاعدة اقتران $g(x)$

❶ $(fOg)(x) = f(g(x)) = (\quad)^2 = (3x+1)^2$

❷ $(fOg)(2) = (3x+1)^2 = (3(2)+1)^2 = (7)^2 = 49$

نعوض في القوس قاعدة اقتران $f(x)$

❸ $(gOf)(x) = g(f(x)) = 3(\quad) + 1 = 3(x^2) + 1$

❹ $(gOf)(5) = 3x^2 + 1 = 3(5)^2 + 1 = 3(25) + 1 = 76$

نبدأ بالدالة $f(g(x))$ خارج القوس f نضع مكان كل x قوس ( ) ثم ننتقل للدالة الثانية g نأخذ كل الدالة نضعها داخل الاقواس

نضع مكان كل x قوس ( )

نعوض مكان كل x العدد 5

بعد ايجاد قاعدة اقتران التركيب $(gOf)(x)$ نعوض العدد المطلوب تعويضه في قاعدة اقتران التركيب $(gOf)(5)$

مثال2 ليكن $f: Z \to Z$ حيث $f(x) = x^2$ وان $g: N \to N$ حيث $g(x) = x + 1$ جد ❶ $(fOg)(x), (gOf)(x)$ ❷ $(fOg)(2), (gOf)(2)$

H.W




مثال3 ليكن $f: R \to R$ حيث $f(x) = 3x + 1$ وان $g: R \to R$ حيث $g(x) = 2x + 5$

هل ان $(gOf)(x) = (fOg)(x)$ ؟ جد قيمة x اذا علمت ان $(fOg)(x) = 28$

Sol

$(fOg)(x) = 28$

$f(g(x)) = 28$

$3(\ ) + 1 = 28$

$3(2x + 5) + 1 = 28$

$3(2x + 5) + 1 = 28$

$6x + 15 + 1 = 28$

$6x + 16 = 28$

$6x + 16 = 28$

$6x = 28 - 16$

$6x = 12$

بقسمة الطرفين على 6

$\frac{6x}{6} = \frac{12}{6}$

$x = 2$

$(gOf)(x) = g(f(x)) = 2(3x + 1) + 5 = 6x + 1 + 5 = 6x + 6$

$(fOg)(x) = f(g(x)) = 3(2x + 5) + 1 = 6x + 15 + 1 = 6x + 16$

$\therefore (gOf)(x) \neq (fOg)(x)$



مثال4 اذا كانت الدالة $f: Z \to Z$ حيث $f(x) = 3x + 1$

والدالة $g: Z \to Z$ حيث $g(x) = 2x + 5$ جد قيمة x اذا كانت $(fOg)(x) = 28$



اذا طلب في السؤال ايجاد مدى التركيب $(fOg)(x)$ فأننا نعوض مجال الدالة الاقرب الى x في قاعدة اقتران التركيب كما في المثال التالي .

مثال5 ليكن $f: A \to N$ وكانت $f(x) = 4x + 3$ حيث $A = \{1, 2, 3\}$ وان $g: N \to N$ حيث $g(x) = x + 1$ جد مدى $(gOf)(x)$

Sol

$(gOf)(x) = g(f(x))$

$= (\ ) + 1$

$= (4x + 3\ ) + 1$

$(gOf)(x) = 4x + 4$

$(gOf)(1) = 4(1) + 4 = 4 + 4 = 8$

$(gOf)(2) = 4(2) + 4 = 8 + 4 = 12$

$(gOf)(3) = 4(3) + 4 = 12 + 4 = 16$

$\therefore$ المدى $= R = \{8, 12, 16\}$

نعوض المجال للدالة الاقرب الى x يعني نعوض $A = \{1, 2, 3\}$ في قاعدة اقتران التركيب



مثال6 اذا كانت $f: N \to N$ حيث $f(x) = 5x + 2$

وان $g: N \to N$ حيث $g(x) = x + 3$ اكتب التطبيق fog بذكر الازواج المرتبة

Sol

$N = \{1, 2, 3, \dots\dots\}$

نبدأ بالتطبيق خارج القوس نضع بدل كل x قوسين فارغين

ثم نعوض التطبيق الثاني في مكان كل x

$$(fog)(x) = f(g(x))$$
$$= 5(\ ) + 2$$
$$= 5(x + 3) + 2$$
$$= 5x + 15 + 2$$
$$(fog)(x) = 5x + 17$$
$$(fog)(1) = 5(1) + 17 = 5 + 17 = 22$$
$$(fog)(2) = 5(2) + 17 = 10 + 17 = 27$$
$$(fog)(3) = 5(3) + 17 = 15 + 17 = 32$$

$$fog = \{(1, 22), (2, 27), (3, 32), \dots\dots\dots\}$$



مثال7 اذا كانت الدالة $f: R \to R$ حيث $f(x) = 3x + 1$

وكانت $g: R \to R$ حيث $g(x) = 2x + 5$ جد ❶ fog ❷ gof



Sol

$R = \{\dots\dots -1, 0, 1, \dots\dots\}$

❶ $(fog)(x) = f(g(x))$

❷ gof



$$= 3(\ ) + 1$$
$$= 3(2x + 5) + 1$$
$$= 6x + 15 + 1$$
$$(fog)(x) = 6x + 16$$
$$(fog)(-1) = 6(-1) + 16 = -6 + 16 = 10$$
$$(fog)(0) = 6(0) + 16 = 0 + 16 = 16$$
$$(fog)(1) = 6(1) + 16 = 6 + 16 = 22$$
$$fog = \{\dots\dots, (-1, 10), (0, 16), (1, 22), \dots\dots\}$$



مثال8 اذا كان $f(x) = 2x + 1$ حيث $f: N \to N$ وكان $g(x) = x^2$ حيث $g: N \to N$

جد ❶ $(fOg)(3)$ ❷ $(gOf)(3)$ ماذا تلاحظ ❸ جد قيمة x اذا كان $(fOg)(x) = 33$

Sol

❷ $(gOf)(x) = g(f(x))$
$= (\ )^2$
$(gOf)(x) = (2x+1)^2$
$(gOf)(3) = (2(3)+1)^2$
$= (6+1)^2$
$= (7)^2 = 49$

❶ $(fOg)(x) = f(g(x))$
$= 2(\ ) + 1$
$(fOg)(x) = 2(x^2) + 1$
$(fOg)(3) = 2(3)^2 + 1$
$= 2(9) + 1$
$= 18 + 1 = 19$

نلاحظ ان
$(gOf)(3) \neq (fOg)(3)$

❸ $(fOg)(x) = 33$
$2(x^2) + 1 = 33$
$2x^2 = 33 - 1$
$2x^2 = 32$

$\frac{2x^2}{2} = \frac{32}{2}$ بقسمة الطرفين على 2
$x^2 = 16$
$x = 4$ بجذر الطرفين

مثال9 اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ وكان $f: A \to A$ و $g: A \to A$ معرفتان كالاتي $f = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$ و $g = \{(3,1),(1,2),(2,3)\}$

جد ❶ fOg مع ذكر المجال والمدى له

❷ gOf مع ذكر المجال والمدى له ❸ بين هل ان $fOg = gOf$

Sol $A = \{1,2,3\}$

❶ $fOg(1) = f(g(1)) = f(2) = 3$
$fOg(2) = f(g(2)) = f(3) = 3$
$fOg(3) = f(g(3)) = f(1) = 3$
$fOg = \{(1,3),(2,3),(3,3)\}$
المجال $= D_{fOg} = \{1,2,3\}$
المدى$= R_{fOg} = \{3\}$

❷ $gOf(1) = g(f(1)) = g(3) = 1$
$gOf(2) = g(f(2)) = g(3) = 1$
$gOf(3) = g(f(3)) = g(3) = 1$
$gOf = \{(1,1),(2,1),(3,1)\}$
المجال $= D_{gOf} = \{1,2,3\}$
المدى$= R_{fOg} = \{1\}$

❸ $fOg \neq gOf$ لان المدى للتركيب الاول لايساوي المدى للتركيب الثاني فيكونان غير متساويين



مثال 10 اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ وكان $f: A \to A$ و $g: A \to A$ معرفين كالاتي

$f = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ $g = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ جد ❶ gOf ❷ fOg

H.W

مسائل حياتية

❶ **درجات الحرارة** : سجلت درجات الحرارة في احد ايام الشتاء بالعلاقة التالية $R = \{(6,-2),(9,-3),(12,-4),(15,-5)\}$

اذ يمثل الاحداثي الاول (المسقط الاول) الوقت بالساعة والاحداثي الثاني (المسقط الثاني) درجة الحرارة بالدرجات السيليزية . مثل العلاقة بجدول ومثلها بالمستوي الاحداثي بيانياً ، هل تمثل العلاقة تطبيقاً ام لا ؟

Sol

الوقت/بالساعة	6	9	12	15
درجة الحرارة/سيليزية	-2	-3	-4	-5

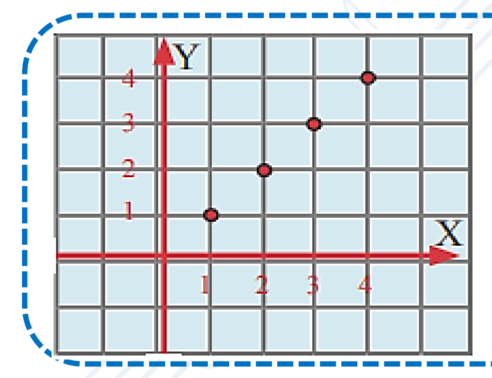
الوقت

درجات الحراره

0, -1, -2, -3, -4, -5, -6

نعم تمثل تطبيق لان كل عنصر في المجال (المسقط الاول) يرتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل (المسقط الثاني)

❷ **المستوي الاحداثي** : الشكل البياني المجاور يمثل التطبيق $f: N \to N$ اكتب إحداثيات الأزواج المرتبة التي تمثلها نقاط التطبيق في البياني، اكتب قاعدة اقتران التطبيق، هل التطبيق متباين أم لا ؟



Sol

$f = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$f(x) = x$

نعم التطبيق متباين لان للعناصر المختلفة في المجال لها صور مختلفة في المجال المقابل

③ **صحة**: العلاقة $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$ تمثل وزن الماء في جسم الانسان، و W_b تمثل وزن الانسان وزن حسان $150\ kg$ استعمل نظام خاص بانقاص الوزن لمدة ثلاثة اشهر ففقد من وزنه $6\ kg$ في الشهر الاول ثم $12\ kg$ في الشهر الثاني و $12\ kg$ في الشهر الثالث .

اكتب جميع الازواج المرتبة للعلاقة بين وزن حسان ووزن الماء في جسمه ، هل تمثل تطبيقاً ام لا ؟

Sol $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$

الوزن الكلي $= 150\ kg$

وزن الشهر بعد انقاص 6kg $= 150 - 6 = 144kg$

وزن الشهر بعد انقاص 12kg $= 144 - 12 = 132k$

وزن الشهر الثالث بعد انقاص 12kg $= 132 - 12 = 120k$

الوزن الكلي $= W_r = 2\left(\frac{\overset{50}{\cancel{150}}}{\cancel{3}}\right) = 2(50) = 100$

وزن الشهر الاول $= W_r = 2\left(\frac{\overset{48}{\cancel{144}}}{\cancel{3}}\right) = 2(48) = 96$

وزن الشهر الثاني $= W_r = 2\left(\frac{\overset{44}{\cancel{132}}}{\cancel{3}}\right) = 2(44) = 88$

وزن الشهر الثالث $= W_r = 2\left(\frac{\overset{40}{\cancel{120}}}{\cancel{3}}\right) = 2(40) = 80$

$W_r = \{(150,100), (144,96), (132,88), (120,80)\}$

نعم العلاقة تمثل تطبيق لان كل عنصر من عناصر المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل





تحدٍ: اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ وكان $f: A \to A$ و $g: A \to A$ معرفان كالاتي

$f = \{(1,3), (2,3), (3,3)\}$ و $g = \{(3,1), (1,2), (2,3)\}$ بين هل $fOg = gOf$ ؟

هذا السؤال محلول ضمن مثال رقم 8 من امثلة تركيب التطبيقات


ثانياً

اصحح الخطأ : قال ياسين ان العلاقة $f: Z \to Z$ حيث $f(x) = x^3$ لا تمثل تطبيقاً متبايناً .

حدد خطأ ياسين وصححهُ .




خطأ ياسين (العلاقة لا تمثل تطبيقاً متبايناً)

$$Z = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots \dots\}$$







$$f(x) = x^3$$
$$f(0) = (0)^3 = 0$$
$$f(1) = (1)^3 = 1$$
$$f(-1) = (-1)^3 = -1$$

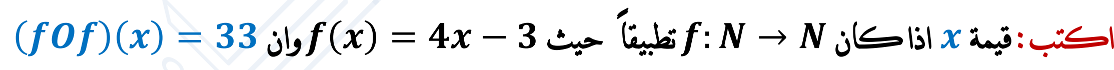
ثالثاً

حس عددي : حدد ما اذا كانت كل علاقة $f: x \to y$ فيما يلي تمثل تطبيقاً ام لا ؟ فسر ذلك .

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11



نعم العلاقة تمثل تطبيقاً لان كل عنصر من x يرتبط بعنصر واحد فقط من y




رابعاً

اكتب : قيمة x اذا كان $f: N \to N$ تطبيقاً حيث $f(x) = 4x - 3$ وان $(fOf)(x) = 33$



$$(fOf)(x) = 33$$
$$f(f(x)) = 33$$
$$f(f(x)) = 33$$
$$4(\ ) - 3 = 33$$
$$4(4x - 3) - 3 = 33$$
$$16x - 12 - 3 = 33$$
$$16x - 15 = 33$$

$$16x = 33 + 15$$
$$16x = 48$$

بقسمة الطرفين على 16

$$\frac{16x}{16} = \frac{48}{16}$$
$$x = 3$$

الاختيارُ من متعدد Multiple Choice

الدرس [2-1] التطبيقات Mappings

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 إذا كان التطبيق $f: A \to B$ معرف كالآتي $x \to x + 1$:
$f: A \to B$ حيث $A = \{1 , 3 , 5\}$ ، $B = \{2 , 4 , 6 , 8\}$. فإن مدى التطبيق هو:

a) $\{2 , 4 , 8\}$ b) $\{4 , 6 , 8\}$
c) $\{2 , 4 , 6\}$ ✓ d) $\{2 , 6 , 8\}$

2 إذا كانت $A = \{1 , 2 , -2 , -3\}$ وكان $g: A \to Z$. فإن مدى التطبيق إذا كان $g(x) = 5x - 3$ هو:

a) $\{2 , 9 , 13 , 18\}$ b) $\{2 , 7 , -13 , -18\}$ ✓
c) $\{9 , 13 , 18 , 21\}$ d) $\{7 , 13 , 15 , 18\}$

3 إذا كانت $f: Z \to R$ إذ $f(x) = 3x - 2$. فإن العدد 10 هو صورة للعدد:

a) 5 b) 4 ✓ c) 3 d) 2

4 ليكن $f: A \to B$ إذ $A = \{2 , 3 , 4 , 5\}$ ، $B = \{4 , 6 , 8\}$. وإن $f = \{(2 , 4), (3 , 6), (4 , 8), (5 , 8)\}$
فإن f يمثل تطبيقاً شاملاً لأن:

a) المدى ≠ المجال المقابل b) f تطبيق غير متباين
c) المدى هو مجموعة A d) المدى = المجال المقابل ✓

5 إذا كانت $f: Z \to Z$ إذ $f(x) = 2x - 3$ و $g: Z \to Z$ إذ $g(x) = x + 1$. فإن التطبيق $(gof)(x)$ هو:

a) $2x - 2$ ✓ b) $2x - 4$ c) $2x + 2$ d) $2x + 4$

6 ليكن $f: \{2 , 3 , 5\} \to N$ إذ $f(x) = 3x - 1$ وإن $g: N \to N$ إذ $g(x) = x + 1$ فإن مدى gof هو المجموعة:

a) $\{5 , 8 , 14\}$ b) $\{5 , 6 , 9\}$
c) $\{6 , 12 , 15\}$ d) $\{6 , 9 , 15\}$ ✓

7 إذا كان التطبيق $f: Q \to Q$ إذ $f(x) = 4x + 1$ والتطبيق $g: Q \to Q$ إذ $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$.
جد قيمة x إذا كانت $(fog)(x) = 45$. فإن قيمة x هي:

a) ± 5 b) ± 6 ✓ c) ± 7 d) ± 8







المتتابعة : هي دالة $f: N \to R$ مجالها مجموعة الاعداد الطبيعية N او أي مجموعة جزئية منها مرتبة بالشكل $[1, 2, 3, \ldots\ldots]$

حيث تكتب المتتابعة بصورة الازواج المرتبة من المسقط الاول التي هي الاعداد الطبيعية والمسقط الثاني صورة الدالة

$\{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), \ldots\ldots\ldots (n, f(n))\}$ او مجموعة الصور فقط

$\{u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots\ldots u_n\}$ حيث ان $u_n = f(n)$ هو الحد العام للمتتابعة الذي يمثل المسقط الثاني فقط لان المسقط الاول معلوم هو

$n = \{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$.

ملاحظات

❶ الدالة التي مجالها غير الاعداد الطبيعية او غير مرتبة بالشكل $\{1, 2, 3, \ldots\ldots\}$ لا تسمى متتابعة

لان من شروط المتتابعة الترتيب .

مثلاً : $f = \{(1, 3), (2, 7), (5, 4), (6, 10) \ldots\ldots\}$ لا تسمى متتابعة لان مجالها $n = \{1, 2, 5, 6, \ldots\ldots\}$

وليس بالترتيب $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots\ldots\}$

❷ التكرار مسموح في المتتابعة

اولاً المتتابعة الغير منتهية :- وهي المتتابعة الذي يكون مجالها كل مجموعة الاعداد الطبيعية N ويرمز لها بالرمز

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ او $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

ثانياً المتتابعة المنتهية :- وهي المتتابعة التي يكون مجالها مجوعة جزئية من مجموعة الاعداد الطبيعة N $n \subseteq N$ مثل

$n = \{1, 2, 3, 4\}$ ويرمز لها بالرمز $\{u_n\}_{n=1}^{m}$ او $\{f(n)\}_{n=1}^{m}$

مثال1 اكتب الازواج المرتبة الخمسة الاولى للمتتابعات ثم مثلها بالمستوي الاحداثي .

❶ $u_n = \left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right\}$

نعوض بدل n الاعداد التالية على الترتيب $n = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Sol

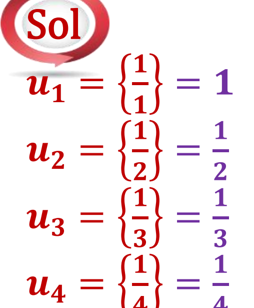
$u_1 = \left\{\frac{1}{1}\right\} = 1$

$u_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$

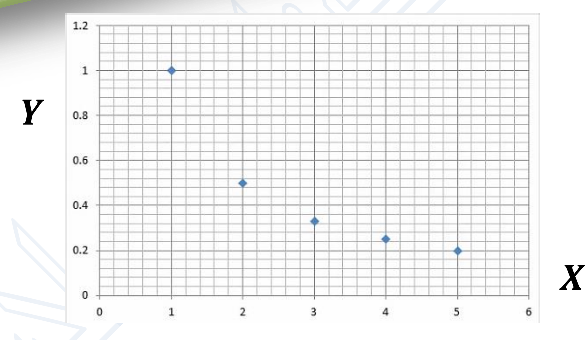
$u_3 = \left\{\frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{3}$

$u_4 = \left\{\frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4}$

$u_5 = \left\{\frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5}$



نعوض اخر عدد 5 لان طلب في السؤال كتابة الازواج المرتبة الخمسة الاولى فقط



الازواج المرتبة $= \left\{(1, 1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \left(4, \frac{1}{4}\right), \left(5, \frac{1}{5}\right), \dots\right\}$

❷ $u_n = \{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$

Sol الازواج المرتبة $= \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), \dots\}$

❸ $u_n = \{n + 2\} = \{3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

Sol الازواج المرتبة $= \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), \dots\}$

❹ $u_n = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$

❺ $u_n = \{3n - 1\}$

❻ $u_n = \{3n^2\}$

H.W



مثال2 اكتب الازواج المرتبة الاربعة الاولى للمتتابعات التي حدها العام معطى

نكتب اربعة حدود لان المطلوب الازواج المرتبة الاربعة الاولى يعني نعوض $n = \{1, 2, 3, 4\}$

$n = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

❶ $u_n = 10 - 4n$

Sol $u_1 = 10 - 4(1) = 10 - 4 = 6$

$u_2 = 10 - 4(2) = 10 - 8 = 2$

$u_3 = 10 - 4(3) = 10 - 12 = -2$

$u_4 = 10 - 4(4) = 10 - 16 = -6$

الازواج المرتبة $= \{(1, 6), (2, 2), (3, -2), (4, -6), \dots\}$

❷ $u_n = n^2 - 1$

Sol $u_1 = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$u_2 = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$u_3 = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

$u_4 = (4)^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

الازواج المرتبة $= \{(1, 0), (2, 3), (3, 8), (4, 15), \dots\}$

العدد (-1) اذا رفع الى عدد زوجي فيكون الناتج $(+1)$ واذا رفع الى عدد فردي فيكون الناتج (-1)

④ $u_n = \frac{1}{3n+1}$

Sol $u_1 = \frac{1}{3(1)+1} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4}$

$u_2 = \frac{1}{3(2)+1} = \frac{1}{6+1} = \frac{1}{7}$

$u_3 = \frac{1}{3(3)+1} = \frac{1}{9+1} = \frac{1}{10}$

$u_4 = \frac{1}{3(4)+1} = \frac{1}{12+1} = \frac{1}{13}$

الازواج المرتبة $= \left\{\left(1,\frac{1}{4}\right),\left(2,\frac{1}{7}\right),\left(3,\frac{1}{10}\right),\left(4,\frac{1}{13}\right),\ldots\right\}$

③ $u_n = \frac{-n}{n+5}$

Sol $u_1 = \frac{-1}{1+5} = \frac{-1}{6}$

$u_2 = \frac{-2}{2+5} = \frac{-2}{7}$

$u_3 = \frac{-3}{3+5} = \frac{-3}{8}$

$u_4 = \frac{-4}{4+5} = \frac{-4}{9}$

الازواج المرتبة $= \left\{\left(1,\frac{-1}{6}\right),\left(2,\frac{-2}{7}\right),\left(3,\frac{-3}{8}\right),\left(4,\frac{-4}{9}\right),\ldots\right\}$

H.W اكتب الازواج المرتبة الاربعة الاولى للمتتابعات التي حدها العام معطى

⑤ $u_n = 9 - 3n$	④ $u_n = \frac{3n}{2}$	③ $u_n = \frac{2n-1}{n}$	② $u_n = (-2)^n$	① $u_n = \frac{n}{n+2}$
				⑥ $u_n = n^2 - 2$

المتتابعة الحسابية

هي المتتابعة التي يكون فيها الفرق بين كل حدين متتالين عدداً ثابتاً ويسمى اساس المتتابعة ويرمز له بالرمز d

قانون اساس المتتابعة الحسابية d :- $d = u_{n+1} - u_n$ أي انه $d =$ الحد الثاني − الحد الاول

قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية :- $u_n = a + (n-1)(d)$ حيث $a = u_1$ ، $n \in N$ ، d اساس المتتابعة

مثال 1 اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية الاتية ؟

① متتابعة حسابية الحد الاول لها 3 (a) واساسها 6 (d)



Sol $u_n = a + (n-1)(d)$ $n = 1,2,3,4,5$

$u_1 = 3 + (1-1)(6) = 3 + (0)(6) = 3 + 0 = 3$

$u_2 = 3 + (2-1)(6) = 3 + (1)(6) = 3 + 6 = 9$

$u_3 = 3 + (3-1)(6) = 3 + (2)(6) = 3 + 12 = 15$

$u_4 = 3 + (4-1)(6) = 3 + (3)(6) = 3 + 18 = 21$

$u_5 = 3 + (5-1)(6) = 3 + (4)(6) = 3 + 24 = 27$

الحدود الخمسة للمتتابعة $\{3, 9, 15, 21, 27\}$

② متتابعة حسابية الحد الاول 1 (a) واساسها -3 (d)

$u_n = a + (n-1)(d)$ $n = 1,2,3,4,5$

Sol $u_1 = 1 + (1-1)(-3) = 1 + (0)(-3) = 1 + 0 = 1$

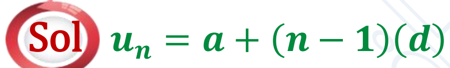
$u_2 = 1 + (2-1)(-3) = 1 + (1)(-3) = 1 - 3 = -2$

$u_3 = 1 + (3-1)(-3) = 1 + (2)(-3) = 1 - 6 = -5$

$u_4 = 1 + (4-1)(-3) = 1 + (3)(-3) = 1 - 9 = -8$

$u_5 = 1 + (5-1)(-3) = 1 + (4)(-3) = 1 - 12 = -11$

الحدود الخمسة للمتتابعة $\{1, -2, -5, -8, -11\}$



❸ متابعة حسابية الحد الاول لها -3 واساسها -4

Sol سوف نحل هذه المثال بطريقة اضافة الاساس على الحد الاول لايجاد الحد الثاني ونضيفة على الحد الثاني لايجاد الحد الثالث وهكذا

$$\{-3, \overset{+(-4)}{\longrightarrow} -7, \overset{+(-4)}{\longrightarrow} -11, \overset{+(-4)}{\longrightarrow} -15, \overset{+(-4)}{\longrightarrow} -19\}$$

$$-3 + (-4) = -3 - 4 = -7$$
$$-7 + (-4) = -7 - 4 = -10$$

اذن الحدود الخمسة للمتابعة $\{-3, -7, -11, -15, -19\}$

ملاحظة: تستخدم هذه الطريقة عندما يكون الحد الاول معلوم والاساس ايضا

H.W

❹ متابعة حسابية الحد الاول فيها 1 واساسها 5 ❺ متابعة حسابية الحد الاول فيها -5 واساسها 2

مثال2 اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل متابعة من المتابعات الحسابية التالية

❶ متابعة حسابية حدها السابع 36 واساسها 4

Sol $u_7 = 36 \quad n = 7 \quad d=4 \quad a = ?$

$$u_n = a + (n-1)(d)$$
$$u_7 = a + (7-1)(4)$$
$$36 = a + (6)(4)$$
$$36 = a + 24 \Rightarrow a = 36 - 24 \Rightarrow a = 12 = u_1$$

اذا اعطى في السؤال أي حد غير الحد الاول واعطى اساس المتابعة يمكن ان نجد الحد الاول باستخدام قانون الحد العام للمتابعة الحسابية

نجد الحدود البقية بطريقة اضافة الاساس السابقة

الحدود الخمسة للمتابعة $\{12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$

❷ متابعة حسابية الحد السابع فيها $\frac{1}{24}$ واساسها $\frac{1}{3}$

Sol $u_7 = \frac{1}{24} \quad n = 7 \quad d=\frac{1}{3} \quad a = ?$

$$u_n = a + (n-1)(d)$$
$$u_7 = a + (7-1)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\frac{1}{24} = a + (6)\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\frac{1}{24} = a + 2 \Rightarrow 24a + 48 = 1$$
$$24a = 1 - 48 \Rightarrow 24a = -47$$
$$\frac{24a}{24} = \frac{-47}{24}$$
$$a = \frac{-47}{24}$$
$$a = u_1 = \frac{-47}{24}$$

a تمثل الحد الاول نجمع مع الحد الاول الاساس لنجد الحد الثاني و هكذا

نوحد المقامات

$$u_2 = u_1 + d \Rightarrow u_2 = \frac{-47}{24} + \frac{1}{3} = \frac{-47+8}{24} \Rightarrow u_2 = \frac{-39}{24}$$
$$u_3 = u_2 + d \Rightarrow u_3 = \frac{-39}{24} + \frac{1}{3} = \frac{-39+8}{24} \Rightarrow u_3 = \frac{-31}{24}$$
$$u_4 = u_3 + d \Rightarrow u_4 = \frac{-31}{24} + \frac{1}{3} = \frac{-31+8}{24} \Rightarrow u_4 = \frac{-23}{24}$$
$$u_5 = u_4 + d \Rightarrow u_5 = \frac{-23}{24} + \frac{1}{3} = \frac{-23+8}{24} \Rightarrow u_5 = \frac{-15}{24}$$

الحدود الخمسة للمتابعة

$$\left\{\frac{-47}{24}, \frac{-39}{24}, \frac{-31}{24}, \frac{-23}{24}, \frac{-15}{24}, \dots\right\}$$

مثال3 اكتب الحدود للمتابعات الاتية .

❶ متابعة حسابية حدها الثالث 8 واساسها -3 جد الحدود بين u_7 و u_{11}

Sol $u_3 = 8 \quad , \quad d = -3 \qquad n = 3 \qquad u_8 = ? \quad , \quad u_9 = ? \quad , \quad u_{10} = ?$ الحدود المطلوبة

في البداية نجد الحد الاول $u_1 = a$ ثم نعوض الحد الاول في قانون الحد العام للمتتابعة الهندسية ثم نجد الحدود المطلوبة

$u_n = a + (n-1)(d)$

$u_3 = a + (3-1)(-3) \Rightarrow 8 = a + (2)(-3)$

$8 = a - 6 \Rightarrow a = 14$

$u_8 = a + (n-1)(d) \Rightarrow u_8 = 14 + (8-1)(-3) \Rightarrow u_8 = 14 + (7)(-3) \Rightarrow u_8 = 14 - 21 \Rightarrow u_8 = -7$

$u_9 = u_8 + d \Rightarrow u_9 = -7 + (-3) \Rightarrow u_9 = -7 - 3 = -10$

$u_{10} = u_9 + d \Rightarrow u_{10} = -10 + (-3) \Rightarrow u_9 = -10 - 3 = -13$

بعد ايجاد الحد الثامن باستخدام قانون الحد العام نجمع الحد الثامن مع اساس المتتابعة لإيجاد الحد التاسع ثم نجمع الحد التاسع مع الاساس لإيجاد الحد العاشر

الحدود المطلوبة للمتتابعة $\{\ldots, -7, -10, -13, \ldots\}$

---

❷ جد الحدود بين u_6 و u_{10} لمتابعة حسابية حدها الثاني -11 واساسها -3

Sol $u_2 = -11 \quad , \quad d = -3 \qquad n = 6$, والمعطيات $u_7 = ? \quad , \quad u_8 = ? \quad , \quad u_9 = ?$ الحدود المطلوبة

$u_n = a + (n-1)(d)$

$u_2 = a + (2-1)(-3) \Rightarrow -11 = a + (1)(-3) \Rightarrow -11 = a - 3 \Rightarrow a = -11 + 3$

$a = -8 = u_1$

$u_7 = a + (7-1)(d) \Rightarrow u_7 = -8 + (6)(-3) \Rightarrow u_7 = -8 - 18 \Rightarrow u_7 = -26$

$u_8 = u_7 + d \Rightarrow u_8 = -26 + (-3) \Rightarrow u_8 = -26 - 3 \Rightarrow u_8 = -29$

$u_9 = u_8 + d \Rightarrow u_9 = -29 + (-3) \Rightarrow u_9 = -29 - 3 \Rightarrow u_9 = -32$

الحدود المطلوبة للمتتابعة $\{\ldots, -26, -29, -32, \ldots\}$

---

❸ جد الحدود بين u_3 و u_8 لمتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{-3}{2}$ واساسها 2

Sol $u_2 = \frac{-3}{2} \quad , \quad d = 2 \qquad n = 2 \qquad u_4 = ? \quad , \quad u_5 = ? \quad , \quad u_6 = ? \quad , u_7 = ?$ الحدود المطلوبة

$u_n = a + (n-1)(d) \Rightarrow u_2 = a + (2-1)(2) \Rightarrow \frac{-3}{2} = a + (1)(2) \Rightarrow \frac{-3}{2} = a + 2 \Rightarrow 2a + 4 = -3$

$2a = -3 - 4 \Rightarrow 2a = -7 \Rightarrow a = \frac{-7}{2}$

$u_4 = a + (4-1)(d) \Rightarrow u_4 = \frac{-7}{2} + (3)(2) \Rightarrow u_4 = \frac{-7}{2} + 6 \Rightarrow u_4 = \frac{-7+12}{2} \Rightarrow u_4 = \frac{5}{2}$

$u_5 = u_4 + d \Rightarrow u_5 = \frac{5}{2} + 2 \Rightarrow u_5 = \frac{5+4}{2} \Rightarrow u_5 = \frac{9}{2}$

$u_6 = u_5 + d \Rightarrow u_6 = \frac{9}{2} + 2 \Rightarrow u_6 = \frac{9+4}{2} \Rightarrow u_6 = \frac{13}{2}$

$u_7 = u_6 + d \Rightarrow u_7 = \frac{13}{2} + 2 \Rightarrow u_7 = \frac{13+4}{2} \Rightarrow u_7 = \frac{17}{2}$

الحدود المطلوبة للمتتابعة $\{\ldots, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \ldots\}$

H.W

❹ جد الحدود بين u_8 و u_{12} لمتابعة حسابية حدها الثالث 9 و $d=-2$

❺ جد الحدود بين u_4 و u_9 لمتابعة حسابية حدها الثالث 6 و $d=\frac{-5}{2}$

❻ جد الحدود بين u_{20} و u_{23} لمتابعة حسابية حدها الثاني 0 و $d=-1$

انواع المتابعات الحسابية

اولاً متابعة حسابية متزايدة تكون المتابعة الحسابية متزايدة اذا كانت المسافة بين حدها الثاني والاول اكبر من صفر

$(d>0)$ مثلاً $\{1,3,5,7,\dots\}$

ثانياً متابعة حسابية متناقصة تكون المتابعة الحسابية متناقصة اذا كانت المسافة بين حدها الثاني والاول اصغر من صفر

$(d<0)$ مثلاً $\{4,2,0,-2,-4,\dots\}$

ثالثاً متابعة حسابية ثابتة تكون المتابعة الحسابية ثابتة اذا كانت المسافة بين حدها الثاني والاول تساوي صفر

$(d=0)$ مثلاً $\{5,5,5,5,\dots\}$

مثال4 بين انواع المتابعات (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة)

❶ $\{u_n\}=\{2n+5\}$ $\quad n=\{1,2,3,4,\dots\}$

نعوض بدل كل n $\quad n=\{1,2,3,4,\dots\}$

Sol $\{u_1\}=2(1)+5=2+5=7$

$\{u_2\}=2(2)+5=4+5=9$

$\{u_3\}=2(3)+5=6+5=11$

$\{u_4\}=2(4)+5=8+5=13$

$d=u_2-u_1\Rightarrow d=9-7\Rightarrow d=2$

$\because d>0$ ∴ المتابعة متزايدة

❷ $\{u_n\}=\{3-2n\}$

Sol $\{u_1\}=3-2(1)=3-2=1$

$\{u_2\}=3-2(2)=3-4=-1$

$\{u_3\}=3-2(3)=3-6=-3$

$\{u_4\}=3-2(4)=3-8=-5$

$d=u_2-u_1\Rightarrow d=-1-1\Rightarrow d=-2$

$\because d<0$ ∴ المتابعة متناقصة

❸ $\{u_n\}=\{9\}$

Sol $=\{9,9,9,9,\dots.\}$

$d=u_2-u_1\Rightarrow d=9-9\Rightarrow d=9$

$\because d=0$ ∴ المتابعة ثابتة

❹ $\{u_n\}=\{2n-5\}$ ❺ $\{u_n\}=\left\{\frac{n}{3}\right\}$ ❻ $\{u_n\}=\{2n-1\}$

❼ $\{u_n\}=\{\sqrt{3}\}$



مثال5 أكتب الحد العشرين من المتابعة الحسابية $\{6, 1, -4, -9, \dots \dots\}$ وحدد اذا كانت المتابعة متزايدة او متناقصة .

نجد الاساس d ثم نعوض الاساس والحد الاول a في قانون الحد العام لإيجاد الحد المطلوب

Sol $u_{20} = ?$, $a = 6$

$u_n = a + (n-1)(d)$

$u_{20} = 6 + (20-1)(-5)$

$u_{20} = 6 + (19)(-5)$

$u_{20} = 6 - 95 \Rightarrow u_{20} = -89$

$d = u_2 - u_1$

$d = 1 - 6$

$\because d = -5 \quad , \therefore d < 0$

∴ المتتابعة متناقصة

مثال6 أكتب الحد الثالث والعشرين من المتابعة الحسابية $\{3, 1, -5, -9, \dots\dots\}$ ثم بين المتابعة متزايدة ام متناقصة .

H.W

مسائل حياتية

❶ **لوحات**: يعمل بشار في المرسم خمسة ايام في الاسبوع وينتج لوحة فنية كل ثلاث ايام نظم جدول يربط عدد الايام وعدد اللوحات التي رسمها بشار اذا عمل 4 اسابيع في المرسم
أكتب مجموعة الازواج المرتبة من الجدول ؟ هل يمثل الجدول نمطاً ؟ هل تمثل متابعة ؟



Sol الازواج المرتبة $\{(1,3), (2,6), (3,9), (4,12), (5,15), (6,18)\}$

عدد اللوحات	1	2	3	4	5	6
عدد الايام	3	6	9	12	15	18

نعم يمثل نمطاً والعلاقة تمثل (ثلاث امثال)

نعم تمثل متابعة لان مجالها $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

وحدها العام هو $\{u_n\} = \{3n\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

❷ **رياضة الجري**: في احدى مسابقات الجري سجلت اوقات الفائز الاول وفقاً للجدول الاتي



المسافة بالكيلو متر	1	2	3	4	5
الوقت بالدقيقة و الثانية	3.12	6.32	9.52	12.72	15.92

أكتب مجموعة الازواج المرتبة من الجدول ، هل يمثل الجدول نمطاً ؟ هل يمثل متابعة؟ علل ذلك

Sol الازواج المرتبة $\{(1, 3.12), (2, 6.32), (3, 9.52), (4, 12.72), (5, 15.92)\}$

نعم تمثل نمطاً والعلاقة هي علاقة زيادة بانتظام بين المسافة والوقت نعم تمثل متابعة حسابية لان مجالها $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ حيث الحد الاول هو 3.12 واساسها 3.20 والعلاقة علاقة زيادة



❸ **رياضة القفز بالزانة** :يبين الجدول الاتي محاولات احد ابطال العالم في رياضة القفز بالزانة .

المحاولة	1	2	3	4	5
الارتفاع بالأمتار	5.90	5.95	6.00	6.05	6.10

اكتب مجموعة الازواج المرتبة من الجدول، هل يمثل الجدول نمطاً ؟ هل يمثل متابعة؟ علل اجابتك

Sol الازواج المرتبة $\{(1, 5.90), (2, 5.95), (3, 6.00), (4, 6.05), (5, 6.10)\}$

نعم يمثل نمطاً والعلاقة علاقة زيادة بانتظام بين المحاولات والارتفاع

نعم يمثل متابعة حسابية لان مجالها $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ حدها الاول 5.90 واساسها 0.05



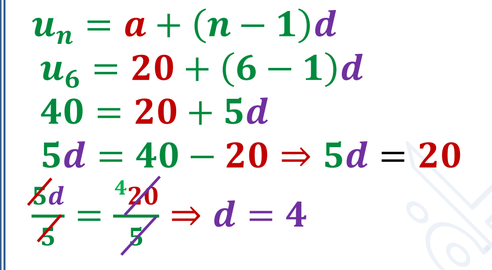
❹ **زراعة** : اشترى حسان مزرعة لتربية الابقار وبعد سنه اصبح فيها 20 بقرة وبدأت تزداد كل سنة نتيجة الولادات بمعدل ثابت حتى اصبح عددها الضعف بعد مضي ست سنوات ، مثل المسألة بجدول ؟ هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متابعة ؟ علل اجابتك

Sol الحد الاول $u_1 = 20$ الحد السادس $u_6 = 40$ الاساس $d = ?$

$$u_n = a + (n-1)d$$
$$u_6 = 20 + (6-1)d$$
$$40 = 20 + 5d$$
$$5d = 40 - 20 \Rightarrow 5d = 20$$
$$\frac{5d}{5} = \frac{20}{5} \Rightarrow d = 4$$



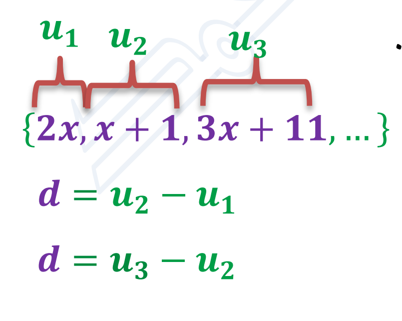
ثم نكون جدول بزيادة الاساس على الحد الاول ينتج الحد الثاني وهكذا



السنوات	1	2	3	4	5	6
عدد الابقار	20	24	28	32	36	40

نعم يمثل نمطاً لان الزيادة بانتظام بين السنوات وعدد الابقار

نعم يمثل متابعة حسابية حدها الاول 20 واساسها 4 ومجالها $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$



فكر اولاً تحدٍ : جد قيمة x التي تجعل الحدود الثلاثة الاولى للمتابعات الحسابية كما يأتي .

$$\{\underbrace{2x}_{u_1}, \underbrace{x+1}_{u_2}, \underbrace{3x+11}_{u_3}, \dots\}$$
$$d = u_2 - u_1$$
$$d = u_3 - u_2$$
$$u_2 - u_1 = u_3 - u_2$$

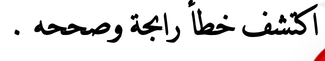
$$(x+1) - (2x) = (3x+11) - (x+1)$$
$$x + 1 - 2x = 3x + 11 - x - 1$$
$$-x + 1 = 2x + 10 \Rightarrow -x - 2x = 10 - 1 \Rightarrow -3x = 9$$
$$\frac{-3x}{-3} = \frac{9}{-3} \Rightarrow x = -3$$




ثانياً اصحح الخطأ : قالت رابحة ان المتابعة التي حدها العام $u_n = 8 - 2n$ متابعة متزايدة لان $d > 0$

اكتشف خطأ رابحة وصححه .







المتابعة متزايدة لان $d > 0$

$u_n = 8 - 2n = \{6, 4, 2, 0, \dots\}$

المتابعة متناقصة لان $d < 0$.

$d = u_2 - u_1 \Rightarrow d = 4 - 6 \Rightarrow d = -2 \quad \therefore d < 0$





ثالثاً حس عددي : ما هو الحد الحادي عشر لمتابعة حدها الثالث 4 واساسها $-\frac{1}{2}$ ؟



المطلوب $u_{11} = ?$, $n = 3$, $d = -\frac{1}{2}$, $u_3 = 4$

$u_n = a + (n-1)(d)$

$u_3 = a + (3-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$4 = a + (2)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$4 = a + (-1) \Rightarrow 4 = a - 1$

$a = 4 + 1 \Rightarrow a = 5$

$u_{11} = 5 + (11-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$u_{11} = 5 + (10)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$u_{11} = 5 + (-5)$

$u_{11} = 5 - 5 \Rightarrow u_{11} = 0$





رابعاً اكتب: الحد الذي ترتيبه 101 في المتابعة الحسابية التي حدها الخامس -4 واساسها 2 .

المطلوب $u_{101} = ?$, $n = 5$, $d = 2$, $u_5 = -4$

$u_n = a + (n-1)(d)$

$u_5 = a + (5-1)(2)$

$-4 = a + (4)(2)$

$-4 = a + 8 \Rightarrow a = -4 - 8$

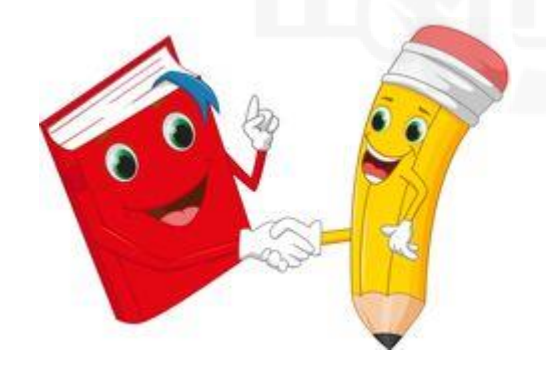
$a = -12$



$u_{101} = a + (101-1)(2)$

$u_{101} = -12 + (100)(2)$

$u_{101} = -12 + 200 \Rightarrow u_{101} = 188$



الاختيارُ من متعدد Multiple Choice

الدرس [1-3] المتتابعات The Sequences

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات التالية:

1 $\{5n - 2\} = \ldots$

a) $\{2, 6, 12, 16, 20\}$ ✓ b) $\{3, 8, 13, 18, 23\}$
c) $\{4, 8, 12, 18, 22\}$ d) $\{5, 10, 16, 20, 24\}$

2 $\{\frac{n}{2} + 1\} = \ldots..$

a) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$ b) $\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$
✓ c) $\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\}$ d) $\{2, \frac{5}{2}, 3\ \frac{7}{2}, 4\}$

3 $\{(\frac{-1}{2+n})\} = \ldots\ldots$

a) $\{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}\}$ ✓ b) $\{\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{7}\}$
c) $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\}$ d) $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية التالية:

4 متتابعة حسابية الحد الثاني فيها 3 وأساسها 3 .

✓ a) $\{0,3,6,9,12\}$ b) $\{2,5,8, 11,14\}$ c) $\{3,6,9, 12,15\}$ d) $\{1,4,7,10,13\}$

5 متتابعة حسابية الحد الثالث فيها 8- وأساسها 2 .

a) $\{-14,-12,-10,-8,-6\}$ ✓ b) $\{-12,-10,-8,-6,-4\}$ c) $\{-10,-8,-6,-4,-2\}$ d) $\{-8,-6,-4,-2,0\}$

6 جد الحد التاسع والحد الخامس عشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الثاني 2 وأساسها 2 .

a) $u_9 = 12\ , u_{15} = 20$ b) $u_9 = 14\ , u_{15} = 24$ ✓ c) $u_9 = 16\ , u_{15} = 28$ d) $u_9 = 18\ , u_{15} = 32$

7 جد الحدود بين u_2 و u_6 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{9}{5}$ وأساسها 2 .

a) $\{\frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \frac{29}{2}\}$ b) $\{\frac{19}{2}, \frac{29}{2}, \frac{39}{2}\}$ c) $\{\frac{9}{5}, \frac{19}{5}, \frac{29}{5}\}$ ✓ d) $\{\frac{19}{5}, \frac{29}{5}, \frac{39}{5}\}$



الدرس 1 – 4

المتباينات المركبة

المتباينة هي جملة خبرية تتكون من وضع احد رموز التباين $(\geq, \leq, >, <)$ بين متغيرين جبريين ويوضع ناتج حل المتباينة في مجموعة الحلول s

اولاً المتباينات المركبة التي تتضمن الاداة (و)

: وهي مؤلفة من متباينتين تكون صحيحة فقط اذا كانت المتباينتين صحيحتين وعليه تكون مجموعة الحل $s = s_1 \cap s_2$ ، وتكتب بصورتين $\{a \leq x \leq b\}$, $\{x \geq a, x \leq b\}$.

ولحل المتباينة المركبة يوجد طريقتين .

❶ **الطريقة الجبرية** : وتتمثل بحل المتباينتين باستخدام خواص المتباينات ثم ايجاد مجموعة التقاطع لمجموعة حل المتباينتين $S = s_1 \cap s_2$

❷ **الطريقة البيانية** : وتتمثل بحل المتباينتين على مستقيم الاعداد ثم تحديد منطقة التقاطع للمتباينتين التي تمثل مجموعة الحل S

مثال1 حل المتباينات المركبة التي تتضمن الاداة (و) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الاعداد

لحل المتباينة نجعل الثوابت بطرف والمتغيرات بالطرف الاخر مع الانتباه الى تغير الاشارة عند النقل من طرف الى اخر

❶ $x + 6 \geq 12$ و $x + 6 \leq 15$

Sol

$x + 6 \geq 12$
$x \geq 12 - 6$
$x \geq 6$
$s_1 = \{x: x \geq 6\}$

و

$x + 6 \leq 15$
$x \leq 15 - 6$
$x \leq 9$
$s_2 = \{x: x \leq 9\}$

$S = s_1 \cap s_2 = \{x: x \geq 6\} \cap \{x: x \leq 9\} \Rightarrow S = \{x: 6 \leq x \leq 9\}$

تقاطع لان الاداة (و)

تكون الفجوة مملوءة ● اذ كانت علامة التباين $\leq$ او $\geq$

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

❷ $-9 < 2x - 1 \leq 3$

Sol

$-9 < 2x - 1 \leq 3$
$-9 + 1 < 2x \leq 3 + 1$
$-8 < 2x \leq 4$
$\frac{-8}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2}$
$-4 < x \leq 2$

نقسم كل المتباينة على معامل x وهو 2

تكون الفجوة فارغة ○ اذ كانت علامة التباين $<$ او $>$

-4 -3 -2 -1 0 1 2

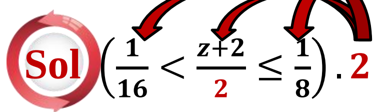
$S = \{x: -4 < x \leq 2\}$



اذا كان المتغير عبارة عن كسر نتخلص من مقام الكسر بضرب جميع حدود المتباينة بنفس المقام

نضرب كل المتباينة في 2 للتخلص من مقام المتغير

❸ $\frac{1}{16} < \frac{z+2}{2} \leq \frac{1}{8}$



Sol $\left(\frac{1}{16} < \frac{z+2}{2} \leq \frac{1}{8}\right) . 2$

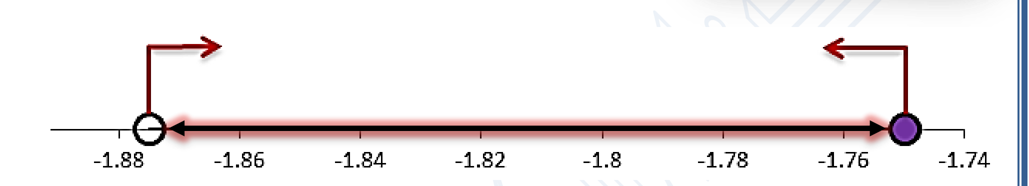
$2\left(\frac{1}{16}\right) < 2\left(\frac{z+2}{2}\right) \leq 2\left(\frac{1}{8}\right)$

$\frac{1}{8} < z + 2 \leq \frac{1}{4}$

$\frac{1}{8} - 2 < z \leq \frac{1}{4} - 2$

$\frac{1-16}{8} < z \leq \frac{1-8}{4}$

$\frac{-15}{8} < z \leq \frac{-7}{4}$



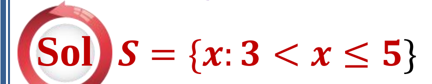
$S = \{z : \frac{-15}{8} < z \leq \frac{-7}{4}\}$

H.W ١

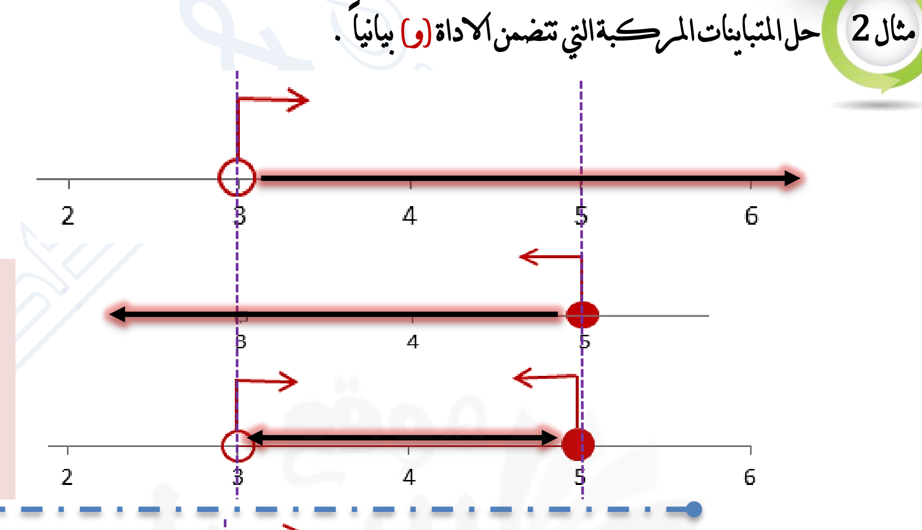
❹ $-9 < 2x - 1 \leq 3$ ❺ $14 \leq 3x + 7$ و $3x + 7 < 26$ ❻ $\frac{1}{25} \leq \frac{z+3}{5} \leq \frac{1}{15}$

مثال 2 حل المتباينات المركبة التي تتضمن الاداة (و) بيانياً .

❶ $x > 3$ و $x \leq 5$

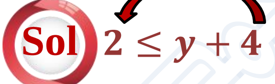


Sol $S = \{x : 3 < x \leq 5\}$



اذا طلب في السؤال حل المتباينة بيانياً نقوم برسم كل متباينة على مستقيم الاعداد ثم نرسم مستقيم ثالث موازٍ للمستقيمين الاول والثاني ثم نرسم خط التقاطع بين كل المستقيمات ومنطقة التقاطع تمثل مجموعة حل المتباينة S

❷ $2 \leq y + 4 < 6$



Sol $2 \leq y + 4$

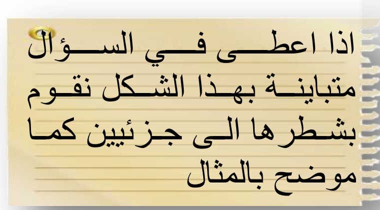
$2 - 4 \leq y$

$-2 \leq y$

$y + 4 < 6$

$y < 6 - 4$

$y < 2$



-2 -1 0 1 2

-2 -1 0 1 2

-2 -1.5 -1 -0.5 0 0.5 1 1.5 2

$S = \{y : -2 \leq y < 2\}$

H.W

③ $-4 \le z+2 \le 8$ ④ $x \le -7$ و $x > -12$

ثانياً المتباينات المركبة التي تتضمن الاداة (او) وهي متباينة تحتوي على متباينتين تتضمن الاداة (او) وتكون صحيحة فقط اذا كانت احدى المتباينتين المكتنين لها صحيحة وعليه فان مجموعة الحل لها تحتوي على اتحاد $S = s_1 \cup s_2$.

وتكتب بالصورة الوحيدة فقط $x \ge a$ او $x \le b$ وتحل بطريقتين ① الطريقة الجبرية ② الطريقة البيانية.



مثال 3 حل المتباينات التي تتضمن الاداة (او) جبرياً ومثل الحل على مستقيم الاعداد

① $y-3 \le -1$ او $y+3 > 6$

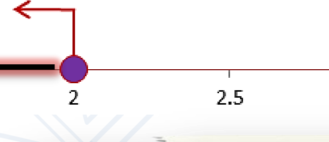
$y-3 \le -1$ او $y+3 > 6$

$y \le -1+3$ | $y > 6-3$

$y \le 2$ | $y > 3$

$s_1 = \{y : y \le 2\}$ | $s_2 = \{y : y > 3\}$

$S = s_1 \cup s_2 = \{y : y \le 2\} \cup \{y : y > 3\}$



نجد مجموعة الحل لكل متباينة على حدة ثم

نجد الاتحاد للحلول $S = s_1 \cup s_2$

اتحاد لان الاداة (او)

② $\frac{h+6}{4} < 2\frac{1}{2}$ او $\frac{h+6}{4} > 6\frac{1}{2}$

Sol

$\frac{h+6}{4} < 2\frac{1}{2}$ او $\frac{h+6}{4} > 6\frac{1}{2}$

نتخلص من الاعداد الصحيحة

$2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ $6\frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

$\frac{h+6}{4} < \frac{5}{2}$ | $\frac{h+6}{4} > \frac{13}{2}$

$4.\left(\frac{h+6}{4}\right) < {}^{2}4.\frac{5}{2}$ | $4.\left(\frac{h+6}{4}\right) > {}^{2}4.\left(\frac{13}{2}\right)$

$h+6 < 2(5)$ | $h+6 > 2(13)$

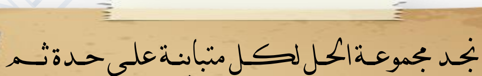
$h+6 < 10$ | $h+6 > 26$

$h < 10-6$ | $h > 26-6$

$h < 4$ | $h > 20$

$s_1 = \{h : h < 4\}$ | $s_2 = \{h : h > 20\}$

$S = \{h : h < 4\} \cup \{h : h > 20\}$



③ $x+15 \ge 30$ او $x+15 < 22$ ④ $\frac{y}{2} < 3\frac{1}{3}$ او $\frac{y}{2} > 7\frac{1}{2}$ ⑤ $3n-7 > -5$ او $3n-7 \le -9$

⑥ $x+8 < 22$ او $x+10 \ge 30$ ⑦ $y < -1$ او $y+3 > 2$

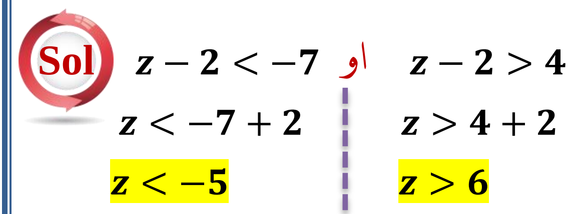
H.W




مثال 4 حل المتباينات المركبة التي تتضمن الاداة (او) بيانياً .

❶ $z-2<-7$ او $z-2>4$

Sol

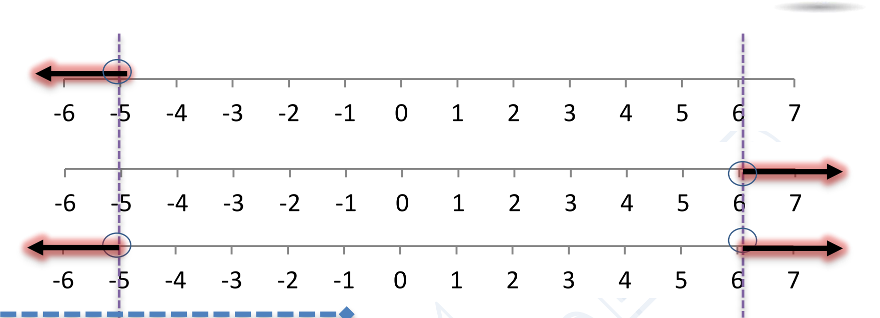


$z-2<-7$ او $z-2>4$

$z<-7+2$ | $z>4+2$

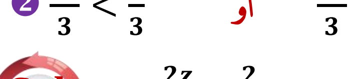
$z<-5$ | $z>6$

$S=\{z: z<-5\} \cup \{z:\ z>6\}$



❷ $\frac{2z}{3}<\frac{2}{3}$ او $\frac{2z}{3}\geq\frac{8}{9}$

Sol



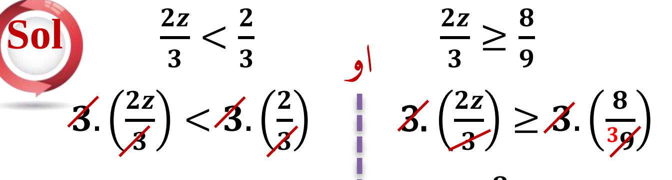
$\frac{2z}{3}<\frac{2}{3}$ او $\frac{2z}{3}\geq\frac{8}{9}$

$3.\left(\frac{2z}{3}\right)<3.\left(\frac{2}{3}\right)$ | $3.\left(\frac{2z}{3}\right)\geq 3.\left(\frac{8}{9}\right)$

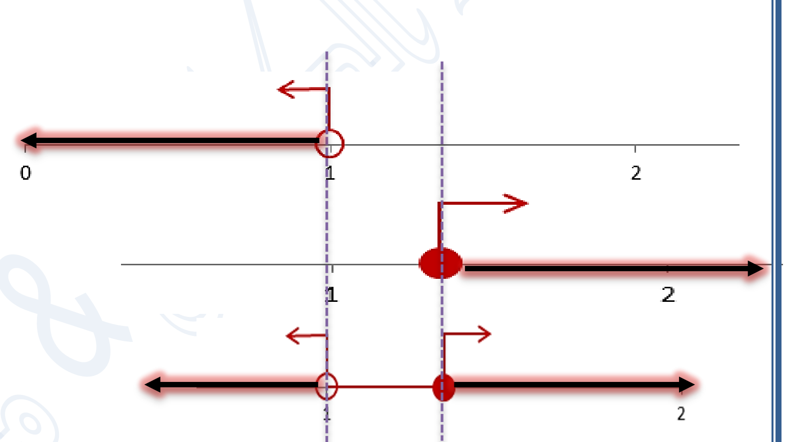
$2z<2$ | $2z\geq\frac{8}{3}$

$\frac{2z}{2}<\frac{2}{2}$ | $\frac{2z}{2}\geq\frac{8}{3}\times\frac{1}{2}$

$z<1$ | $z\geq\frac{4}{3}$



$S=\{z: z<1\} \cup \{z:\ z\geq\frac{4}{3}\}$



H.W ❸ $8y\geq 64$ او $8y\leq 32$

ثالثاً المتباينات المثلثية في كل مثلث مجموع طول ضلعين يكون اكبر من طول الضلع الثالث .

فاذا كانت اطوال اضلاع مثلث (A, B, C) فيجب ان تكون المتباينات الثلاثة التالية صحيحة

$A+B>C$, $A+C>B$, $B+C>A$

مثال 5 هل يمكن رسم مثلث اطوال اضلاعه كما يأتي .

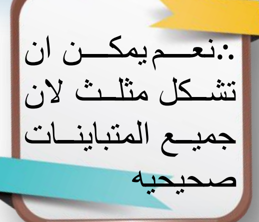
❶ $2cm$, $10cm$, $13cm$

Sol

$10+13>2$ ✓ , $13+2>10$ ✓ , $10+2>13$ ✗

∴ لا يمكن ان تشكل مثلث لأنه توجد متباينة خطأ





❷ $1cm$, $2cm$, $\sqrt{3}\ cm$

Sol $2+\sqrt{3}>1$ ✓ , $1+\sqrt{3}>2$ ✓ , $1+2>\sqrt{3}$ ✓

∴ نعم يمكن ان تشكل مثلث لان جميع المتباينات صحيحه

❸ $1cm$, $\sqrt{2}\ cm$, $\sqrt{2}\ cm$

Sol $\sqrt{2}+\sqrt{2}>1$ ✓ , $1+\sqrt{2}>\sqrt{2}$ ✓ , $1+\sqrt{2}>\sqrt{2}$ ✓

∴ نعم يمكن ان تشكل مثلث لان جميع المتباينات صحيحه

H.W

❹ $5cm$, $4cm$, $9cm$

❺ $2\sqrt{3}\ cm$, $4cm$, $3cm$

مثال 6 ❶ اكتب طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه $10cm$, $3cm$

Sol $10cm$, $3cm$, x نفرض طول الضلع الثالث

$10+x>3 \Rightarrow x>3-10 \Rightarrow x>-7$

يهمل لأنه لا يمكن ان يكون طول ضلع سالب

$3+x>10 \Rightarrow x>10-3 \Rightarrow x>7$

$10+3>x \Rightarrow 13>x$

∴ يكون طول الضلع الثالث حسب المتباينة التالية $7<x<13$

يعني ان طول الضلع بين 13 و 7

اذا طلب في السؤال ايجاد طول ضلع مجهول والمعلوم طول ضلعين نكون ثلاث متباينات لإيجاد طول الضلع

---

❷ اكتب طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه $3cm$, $1cm$.

Sol $1cm$, $3cm$, x نفرض طول الضلع الثالث

$1+3>x \Rightarrow 4>x$

$1+x>3 \Rightarrow x>3-1 \Rightarrow x>2$

$3+x>1 \Rightarrow x>1-3 \Rightarrow x>-2$

يهمل لأنه لا يمكن ان يكون طول ضلع سالب

نكون ثلاث متباينات ثم نجد قيمة x الذي تمثل طول الضلع المجهول

∴ يكون طول الضلع الثالث حسب المتباينة التالية $2<x<4$

يعني ان طول الضلع بين 4 و 2

H.W

❸ اكتب طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه $4cm$, $6cm$.

❹ اكتب طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه $12cm$, $7cm$.

❺ اكتب طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه $12cm$, $5cm$.

مسائل حياتية

❶ **تعلم**: تقاس درجات الحرارة اليومية بالدرجة السيليزية الصغرى والكبرى لكونها متغيرة من وقت الى اخر فاذا كانت درجة الحرارة الصغرى $8°c$ ودرجة الحرارة الكبرى $15°c$ ، اكتب متباينة تمثل درجة الحرارة ثم جد حلها جبرياً .

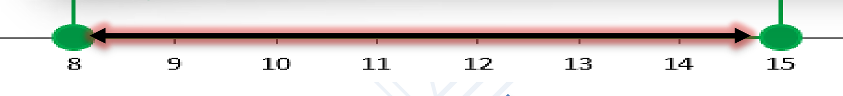


درجات الحرارة الصغرة هي 8 (يعني انها لا تقل على 8) يعني ان $x \geq 8$

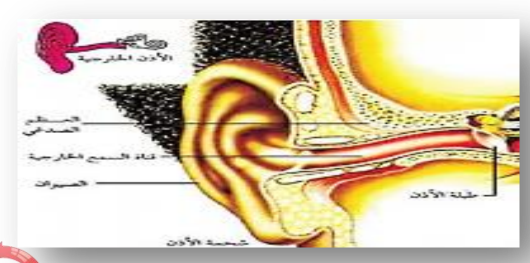
درجات الحرارة الكبرى هي 15(يعني انها لا تزيد على 15) يعني ان $x \leq 15$

Sol $x \geq 8$ و $x \leq 15$

$S = \{x: 8 \leq x \leq 15\}$



❷ **صوت** : أذن الانسان يمكن ان تسمع الاصوات التي لا تقل ترددها عن 20 هرتزاً ولا يزيد على 20000 هرتز . اكتب متباينة مركبة تمثل الترددات التي لا تسمعها أذن الانسان ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد .



الترددات التي تسمعها اذن الانسان $20 \leq x \leq 20000$

المطلوب في السؤال هو الترددات التي لا تسمعها اذن الانسان

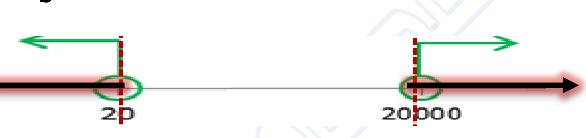
∴ ننفي المتباينة في الاعلى فتصبح بالشكل

$x < 20$ او $x > 20000$ ثم نمثلها بيانياً



Sol

$x < 20$ او $x > 20000$



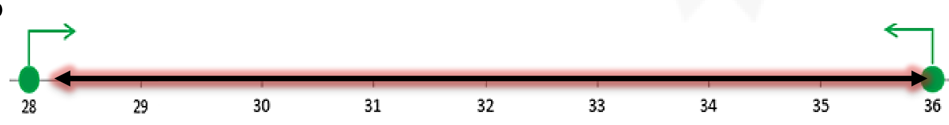
$S = \{x: x < 20\} \cup \{x: x > 20000\}$

❸ **اطار السيارات**: ضغط الهواء المثالي الموصي به لإطارات السيارات الصالون لا يقل عن $28\ pascal(\frac{kg}{ing^2})$ ولا يزيد على $36pasca$. اكتب متباينة مركبة تمثل ضغط الهواء مثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد .



Sol

$x \geq 28$ و $x \leq 36$



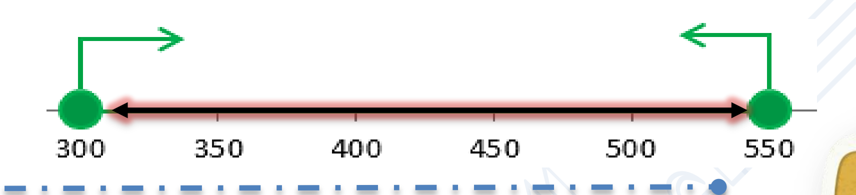
$S = \{x: 28 \leq x \leq 36\}$




❹ **القطار المغناطيسي** : القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسي وباختصار يعرف بالماجليف (Maglev) وصممت انواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم اذا ان سرعتها لا تقل $300k/h$ ولا تزيد على $550k/h$. اكتب متباينة تمثل سرعة القطار و مثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد .

Sol $x \geq 300$ و $x \leq 550$

$S = \{x: 300 \leq x \leq 550\}$





اولاً **تحدٍ** : اكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث اذا علمت ان طول الضلعين الاخرين معلومين

Sol $7cm \quad , \quad 12cm \quad , \quad xcm$

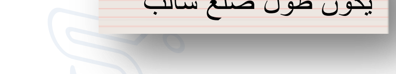
$12 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 12 \Rightarrow x > -5$

يهمل لأنه لا يمكن ان يكون طول ضلع سالب

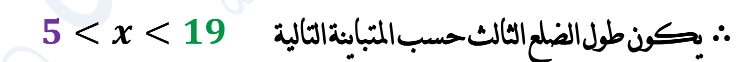
$7 + x > 13.2 \Rightarrow x > 12 - 7 \Rightarrow x > 5$

$12 + 7 > x \Rightarrow 19 > x$

∴ يكون طول الضلع الثالث حسب المتباينة التالية $5 < x < 19$ يعني ان طول الضلع بين 19 و 5



ثانياً **اصحح الخطأ** : قالت سوسن ان المتباينة المركبة $x + 3 \leq 5$ و $-4 < x + 3$ تمثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد الاتية . بين خطأ سوسن وصححه .





Sol

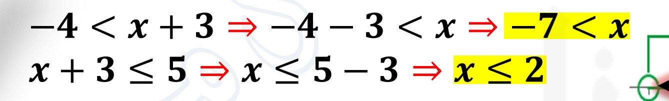




مجال المتباينة الاولى والثانية

$-4 < x + 3 \Rightarrow -4 - 3 < x \Rightarrow -7 < x$

$x + 3 \leq 5 \Rightarrow x \leq 5 - 3 \Rightarrow x \leq 2$



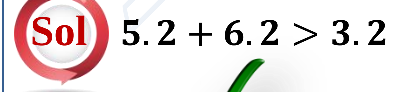
ثالثاً **حس عددي** : اذكر ما اذا كانت الاطوال الثلاثة هي لمثلث ام لا ؟ وضح ذلك .



❶ $3.2cm \quad , \quad 5.2cm \quad , \quad 6.2cm$

Sol نكون المتباينات الثلاثة

$5.2 + 6.2 > 3.2 \quad\quad 3.2 + 6.2 > 5.2 \quad\quad 3.2 + 5.2 > 6.2$



∴ نعم يمكن ان تشكل مثلث لان المتباينات الثلاث صحيحه



❷ $1cm \quad , \quad 1cm \quad , \quad \sqrt{2}cm$




رابعاً اكتب: متباينة مركبة تمثل درجة الحرارة الصغرى °18 ودرجة الحرارة العظمى °27


Sol

نفرض درجة الحرارة x ثم نكتب المتباينة

$x \le 27°$ و $x \ge 18°$ $\Rightarrow$ $S = \{x: 18 \le x \le 27\}$

الاختيارُ من متعدد Multiple Choice

الدرس [1-4] المتباينات المركبة

Compound Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً:

1. $-10 < x$ و $x \le -2$
   a) $\{x: -10 \le x\} \cap \{x: x \le -2\}$ ✓b) $\{x: -10 < x\} \cap \{x: x \le -2\}$
   c) $\{x: -10 \le x\} \cup \{x: x \le -2\}$ d) $\{x: -10 < x\} \cup \{x: x \le -2\}$

2. $0 \le y - 3$ و $y - 3 < 12$
   a) $\{y: 3 < y < 15\}$ b) $\{y: -3 \le y \le 15\}$
   ✓c) $\{y: 3 \le y < 15\}$ d) $\{y: -3 < y < 15\}$

3. $16 < 3z + 9$ و $3z + 9 < 30$
   a) $\{z: \frac{3}{7} \le z < 7\}$ b) $\{z: \frac{7}{3} < z \le 7\}$
   c) $\{z: \frac{3}{7} < z < 7\}$ ✓d) $\{z: \frac{7}{3} < z < 7\}$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً:

4. $2t - 4 > -8$ أو $2t - 4 \le -12$
   a) $\{t: t > -2\} \cap \{t: t \le -4\}$ ✓b) $\{t: t > -2\} \cup \{t: t \le -4\}$
   c) $\{t: t < -2\} \cap \{t: t \ge -4\}$ d) $\{t: t < -2\} \cup \{t: t \ge -4\}$

5. $\frac{y+5}{3} < \frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3} > \frac{7}{3}$
   a) $\{y: y < 4\} \cap \{y: y > 2\}$ b) $\{y: y > -4\} \cup \{y: y < 2\}$
   c) $\{y: y < -4\} \cap \{y: y > -2\}$ ✓d) $\{y: y < -4\} \cup \{y: y > 2\}$

اكتب المتباينة المركبة التي تبيّن مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا الضلعين الآخرين للمثلث معلومين:

6. 5cm , 12cm
   ✓a) $7 < z < 17$ b) $7 \le z < 17$ c) $7 \le z \le 17$ d) $7 < z \le 17$

7. 8cm , 2cm
   a) $6 \le x < 10$ b) $6 \le x \le 10$ ✓c) $6 < x < 10$ d) $6 < x \le 10$

اكتب المتباينة التي مجموعة الحل لها على مستقيم الأعداد هي:

8. (مستقيم أعداد: نقطة مغلقة عند -4 ونقطة مفتوحة عند 3)
   -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
   a) $-4 < x < 3$ ✓b) $-4 \le x < 3$ c) $-4 \le x \le 3$ d) $-4 < x \le 3$

9. (مستقيم أعداد: نقطة مفتوحة عند -3 ونقطة مفتوحة عند 5)
   -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
   a) $y \le -3$ أو $y > 5$ b) $y \le -3$ أو $y \ge 5$ c) $y < -4$ أو $y \ge 5$ ✓d) $y < -3$ أو $y > 5$



الدرس 5 – 1 متباينات القيمة المطلقة

تعرفنا سابقاً على المتباينات المركبة التي تحتوي على (و) ، (او) واليوم سوف نتعرف على متباينات القيمة المطلقة .

اولاً متباينات القيمة المطلقة التي تحتوي على احد رموز التباين التالية (اصغر من ($<$) و اصغر من او يساوي ($\leq$)) .

حيث $|g(x)| < a$, $|g(x)| \leq a$ ، $a, x \in R$.

ملاحظة 1: نفتح المتباينة التي تحتوي المطلق الى قيمتين سالبة وموجبة ، كما في المثال التوضيحي الاتي .

$$|x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4$$

ملاحظة 2: المتباينات التي تحتوي على القيمة المطلقة التي تحتوي على اصغر من ($<$) او (اصغر من او يساوي ($\leq$)) فهي متباينة مركبة تتضمن الاداة (و) .

ملاحظة 3 : القيمة المطلقة تمثل المسافة بين x واي عدد موجود بالقرب من x مثل $|x-2| < 3$ يعني ان المسافة بين x والعدد 2 على مستقيم الاعداد تساوي 3 وحدات .

$$|x-2| < 3 \Rightarrow -3 < x-2 < 3 \Rightarrow -3+2 < x < 3+2 \Rightarrow -1 < x < 5$$

ملاحظة 4 : اذا كانت المتباينة ذات القيمة المطلقة بالصورة $|x| < 4$ يعني ان المسافة بين x والصفر $|x-0| < 4$

مثال 1 حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد .

❶ $|x+6| < 3$

Sol $|x+6| < 3 \Rightarrow -3 < x+6 < 3$

$-3-6 < x < 3-6$

$-9 < x < -3 \Rightarrow S = \{x: -9 < x < -3\}$

❷ $|y| - 5 \leq 1$

قبل ان نفتح المطلق تخلص من العدد 5 بنقله للطرف الثاني ثم نفتح المطلق

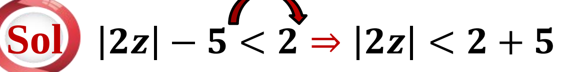
Sol $|y| - 5 \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1+5 \Rightarrow |y| \leq 6$

$|y| \leq 6 \Rightarrow -6 \leq y \leq 6$

$S = \{y: -6 \leq y \leq 6\}$

❸ $|3z - 7| \le 2$

Sol $|3z - 7| \le 2 \Rightarrow -2 \le 3z - 7 \le 2$



$-2 + 7 \le 3z \le 2 + 7 \Rightarrow 5 \le 3z \le 9$

$\frac{5}{3} \le \frac{3z}{3} \le \frac{9}{3} \Rightarrow \frac{5}{3} \le z \le 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{z: \frac{5}{3} \le z \le 3\}$

❹ $|2z| - 5 < 2$

Sol $|2z| - 5 < 2 \Rightarrow |2z| < 2 + 5$



$|2z| < 7 \Rightarrow -7 < 2z < 7$

$\frac{-7}{2} < \frac{2z}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{-7}{2} < z < \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \{z: \frac{-7}{2} < z < \frac{7}{2}\}$

❺ $\left|\frac{x-12}{4}\right| \le 9$

اذا كانت المتباينة كسرية والكسر داخل المطلق نفتح المطلق ثم تخلص من المقام بضرب جميع حدود المتباينة بنفس المقام

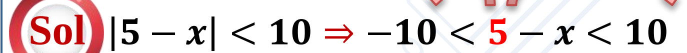
Sol $\left|\frac{x-12}{4}\right| \le 9 \Rightarrow -9 \le \frac{x-12}{4} \le 9$

تخلص من مقام المتغير z بضرب كل حدود المتباينة في العدد 4

$4.(-9) \le 4\left(\frac{x-12}{4}\right) \le 4(9)$

$-36 \le x - 12 \le 36$

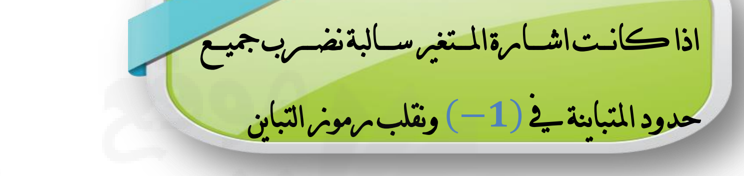
$-36 + 12 \le x \le 36 + 12$



$-24 \le x \le 48 \quad \Rightarrow \quad S = \{x: -24 \le x \le 48\}$

❻ $|5 - x| < 10$

Sol $|5 - x| < 10 \Rightarrow -10 < 5 - x < 10$



$-10 - 5 < -x < 10 - 5 \Rightarrow -15 < -x < 5$

$(-1)(-15) > -1(-x) > (-1)5$

$15 > x > -5$

$-5 < x < 15$



$S = \{x: -5 < x < 15\}$


H.W

❶ $|x + 1| < 5$ ❷ $|x| - 6 < 5$ ❸ $|x| + 8 < 9$ ❹ $|3z| - 5 < 4$

❺ $\left|\frac{z-1}{7}\right| \le 2$ ❻ $|1 - x| < 1$ ❼ $|3y| - 1 \le 8$



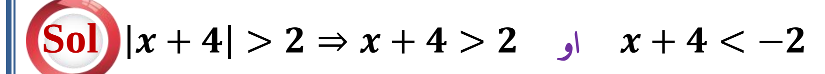
ثانياً متباينات القيمة المطلقة التي تحتوي على احد رموز التباين التالية (اكبر من ($>$) و اكبر من او يساوي ($\geq$)) .

ملاحظة : المتباينات التي تحتوي على القيمة المطلقة التي تحتوي على اكبر من ($>$) او اكبر من او يساوي ($\geq$) فهي متباينة مركبة تتضمن الاداة (او)

، تكتب بالصورة $|g(x)| > a$, $|g(x)| \geq a$ وتحل بالصورة $g(x) < -a$ او $g(x) > a$

$g(x) \leq -a$ او $g(x) \geq a$

وتكتب بمجموعة الحل على شكل اتحاد $S = s_1 \cup s_2$



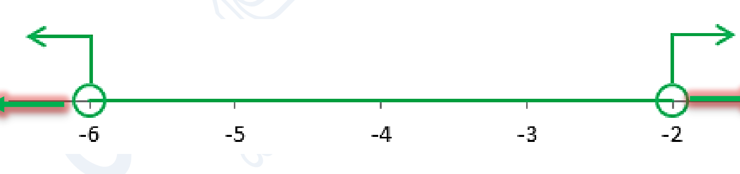
مثال 2 حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد .

❶ $|x+4| > 2$

Sol $|x+4| > 2 \Rightarrow x+4 > 2$ او $x+4 < -2$

$x > 2-4$ او $x < -2-4$

$x > -2$ او $x < -6$



$S = s_1 \cup s_2 = \{x : x > -2\} \cup \{x : x < -6\}$



❷ $|5y-1| \geq 4$

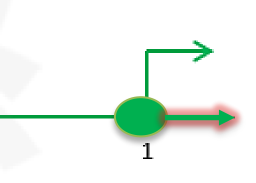
Sol $5y-1 \geq 4$ او $5y-1 \leq -4$

$5y \geq 4+1$ او $5y \leq -4+1$

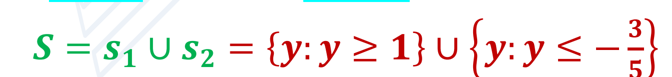
$5y \geq 5$ او $5y \leq -3$

$\frac{5y}{5} \geq \frac{5}{5}$ او $\frac{5y}{5} \leq \frac{-3}{5}$

$y \geq 1$ او $y \leq \frac{-3}{5}$



$S = s_1 \cup s_2 = \{y : y \geq 1\} \cup \left\{y : y \leq -\frac{3}{5}\right\}$



❸ $\left|\frac{2t-8}{4}\right| \geq 9$

Sol $\left|\frac{2t-8}{4}\right| \geq 9 \Rightarrow \frac{2t-8}{4} \geq 9$ او $\frac{2t-8}{4} \leq -9$

$4.\left(\frac{2t-8}{4}\right) \geq 4(9)$ او $4.\left(\frac{2t-8}{4}\right) \leq 4(-9)$

$2t-8 \geq 36$ او $2t-8 \leq -36$

$2t \geq 36+8$ او $2t \leq -36+8$

$2t \geq 44$ او $2t \leq -28$

$\frac{2t}{2} \geq \frac{44}{2}$ او $\frac{2t}{2} \leq \frac{-28}{2}$

$t \geq 22$ او $t \leq -14$

$S = s_1 \cup s_2 = \{t: t \geq 22\} \cup \{t: t \leq -14\}$

-15 -10 -5 0 5 10 15 20 25

❹ $\left|\frac{5-3v}{2}\right| \geq 6$

Sol $\left|\frac{5-3v}{2}\right| \geq 6 \Rightarrow \frac{5-3v}{2} \geq 6$ او $\frac{5-3v}{2} \leq -6$

$2.\left(\frac{5-3v}{2}\right) \geq 2(6)$ او $2.\left(\frac{5-3v}{2}\right) \leq 2(-6)$

$5-3v \geq 12$ او $5-3v \leq -12$

$-3v \geq 12-5$ او $-3v \leq -12-5$

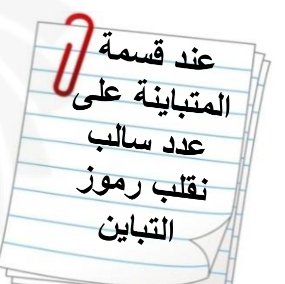
$-3v \geq 7$ او $-3v \leq -17$

$\frac{-3v}{-3} \leq \frac{7}{-3}$ او $\frac{-3v}{-3} \geq \frac{-17}{-3}$

$v \leq \frac{-7}{3}$ او $v \geq \frac{17}{3}$

$S = s_1 \cup s_2 = \left\{v: v \leq \frac{-7}{3}\right\} \cup \left\{v: v \geq \frac{17}{3}\right\}$

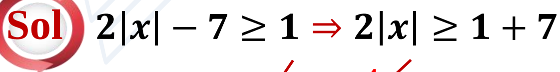
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6



❺ $2|x| - 7 \geq 1$

Sol $2|x| - 7 \geq 1 \Rightarrow 2|x| \geq 1+7$

$2|x| \geq 8 \Rightarrow \frac{2|x|}{2} \geq \frac{8}{2}$



$|x| \geq 4 \Rightarrow x \geq 4$ او $x \leq -4$



$S = s_1 \cup s_2 = \{x: x \geq 4\} \cup \{x: x \leq -4\}$

⑥ $|y-3| > \frac{1}{3}$

نوحد المقامات
$\frac{1}{3}+\frac{3}{1}=\frac{1+9}{3}=\frac{10}{3}$

Sol $|y-3| > \frac{1}{3} \Rightarrow y-3 > \frac{1}{3}$ او $y-3 < -\frac{1}{3}$

$y > \frac{1}{3}+3$ او $y < -\frac{1}{3}+3$

$y > \frac{10}{3}$ او $y < \frac{-1+9}{3} \Rightarrow y > \frac{10}{3}$ او $y < \frac{-8}{3}$

$S = s_1 \cup s_2 = \left\{y: y > \frac{10}{3}\right\} \cup \left\{y: y < \frac{-8}{3}\right\}$

-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4

⑦ $\left|\frac{4}{5}z-1\right| > \frac{4}{5}$

Sol $\left|\frac{4}{5}z-1\right| > \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}z-1 > \frac{4}{5}$ او $\frac{4}{5}z-1 < -\frac{4}{5}$

$\frac{4}{5}z > \frac{4}{5}+1$ او $\frac{4}{5}z < -\frac{4}{5}+1$

$\frac{4}{5}z > \frac{4+5}{5}$ او $\frac{4}{5}z < \frac{-4+5}{5}$

$\frac{4}{5}z > \frac{9}{5}$ او $\frac{4}{5}z < \frac{1}{5}$

$\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}z\right) > \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{9}{5}\right)$ او $\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{4}{5}z\right) < \frac{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)$

$z > \frac{9}{4}$ او $z < \frac{1}{4}$

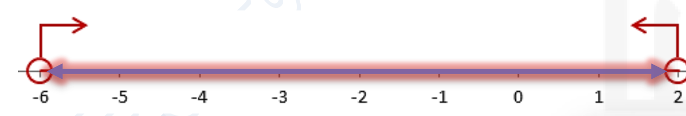
$S = s_1 \cup s_2 = \left\{z: z > \frac{9}{4}\right\} \cup \left\{z: z < \frac{1}{4}\right\}$

0 1 2

❶ $|x+4| > 6$
❷ $|x+1| > \frac{1}{2}$
❸ $|4y|-2 > 3$
❹ $|8z|+3 \geq 11$
❺ $|5z-9| > 1$
❻ $\left|\frac{6-2y}{4}\right| \geq 9$
❼ $\left|\frac{6-3y}{9}\right| \geq 5$
❽ $6|x|-8 \geq 3$

H.W

مثال 3 اكتب متباينة تتضمن القيمة المطلقة لكل التمثيلات البيانية الاتية .

❶ -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2

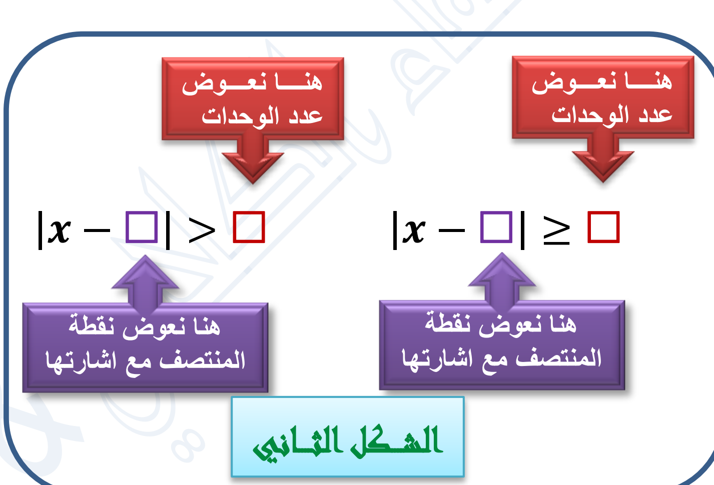
ملاحظة: لحل هذا النوع من الاسئلة نتبع الخطوات التالية (طريقة المتصف)

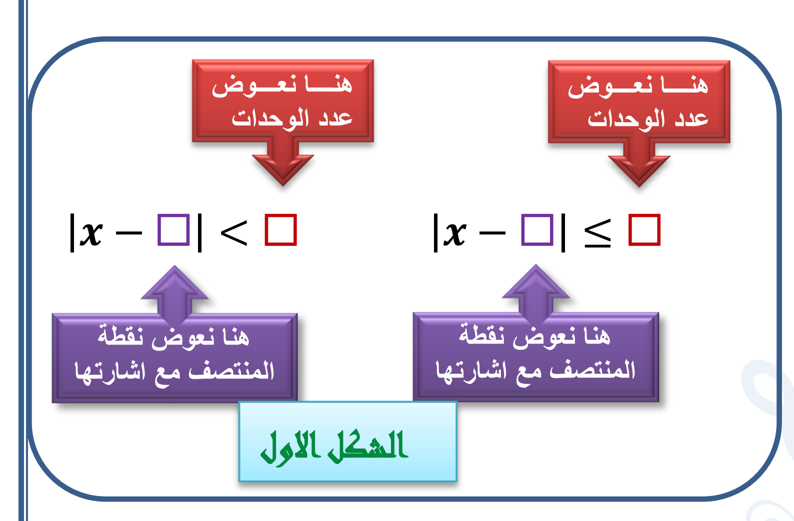
❶ نجد نقطة المتصف بالقانون $\frac{\text{اصغر عدد}+\text{اكبر عدد}}{2}$ ، $\frac{2+(-6)}{2} = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

❷ نجد عدد الوحدات بالقانون $\frac{\text{اصغر عدد}-\text{اكبر عدد}}{2}$ ، $\frac{2-(-6)}{2} = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4$

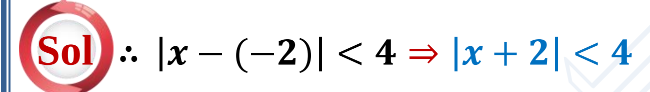
❸ اذا كانت مجموعة الحل **محصورة** بين النقطتين (يعني ان السهمين متجهين للداخل) نضع علامة اصغر من ($<$) واذا كانت الفجوة مغلقة نضع علامة اصغر من او يساوي ($\leq$) . كما موضح بالشكل الاول .

❹ اذا كانت مجموعة الحل **غير محصورة** بين النقطتين (يعني ان السهمين متجهين للخارج) نضع علامة اكبر من ($>$) واذا كانت الفجوة مغلقة نضع علامة اكبر من او يساوي ($\geq$) .كما موضح بالشكل الثاني .





Sol $\therefore\ |x-(-2)| < 4 \Rightarrow |x+2| < 4$

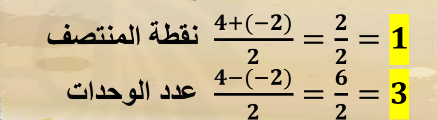


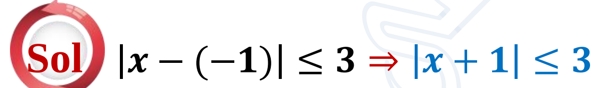
نقطة المنتصف $\frac{2+(-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

عدد الوحدات $\frac{2-(-4)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

❷


Sol $|x-(-1)| \leq 3 \Rightarrow |x+1| \leq 3$



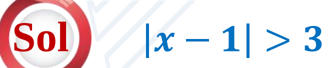


نقطة المنتصف $\frac{4+(-2)}{2} = \frac{2}{2} = 1$

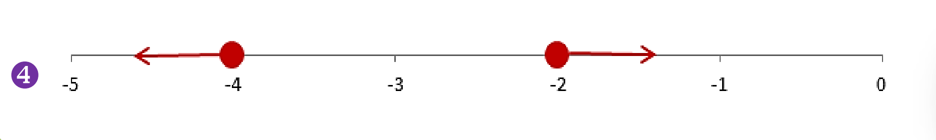
عدد الوحدات $\frac{4-(-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$

❸


Sol $|x-1| > 3$





❹




مسائل حياتية



❶ **فندق بابل** : فندق بابل في العاصمة بغداد درجة حرارة الماء المثالية في حوض السباحة $25°$ تزداد او تنقص بمقدار درجة واحدة . اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة ؟ ثم مثله على خط الاعداد ؟

نفرض درجة حرارة الماء هي x فتكون المتباينة

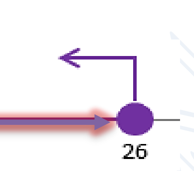
$25 = \frac{50}{2} = \frac{26+24}{2}$ نقطة المنتصف

$1 = \frac{2}{2} = \frac{26-24}{2}$ عدد الوحدات

Sol $x \leq 25 + 1$ و $x \geq 25 - 1$

$x \leq 26$ و $x \geq 24$

$|x - 25| \leq 1$



❷ يجب ان تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة $8°$ سيليزية بزيادة او نقصان لا يتجاوز $0.5°$ سيليزية اكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة .

نفرض درجة حرارة الثلاجة هي x فتكون المتباينة

$8 = \frac{16}{2} = \frac{8.5+7.5}{2}$ نقطة المنتصف

$0.5 = \frac{1}{2} = \frac{8.5-7.5}{2}$ عدد الوحدات

Sol $x \leq 8 + 0.5$ و $x \geq 8 - 0.5$

$x \leq 8.5$ و $x \geq 7.5$

$|x - 8| \leq 0.5$

❸ تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق $22°$ سيليزية بزيادة او نقصان لا يتجاوز $2°$ سيليزية ، اكتب متباينة القيمة المطلقة

نفرض درجة حرارة الشقة هي x فتكون المتباينة

$22 = \frac{44}{2} = \frac{24+20}{2}$

$2 = \frac{4}{2} = \frac{24-20}{2}$

Sol $x \leq 22 + 2$ و $x \geq 22 - 2$

$x \leq 24$ و $x \geq 20$

$|x - 22| \leq 2$

❹ درجة غليان الماء $100°$ سيليزية عند مستوى سطح البحر وتزداد وتقل في المناطق الجبلية والوديان بما لا يتجاوز $20°$ سيليزية اكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء ؟

نفرض درجة غليان الماء هي x فتكون المتباينة

$100 = \frac{200}{2} = \frac{120+80}{2}$

$20 = \frac{40}{2} = \frac{120-80}{2}$

Sol $x \leq 100 + 20$ و $x \geq 100 - 20$

$x \leq 120$ و $x \geq 80$

$|x - 100| \leq 20$

❺ في تحليلات دم الانسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو $(3.5-5.3)mol/l$.اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى الغير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الانسان ؟

Sol

$\frac{5.3+3.5}{2}=\frac{8.8}{2}=4.4$

$\frac{5.3-3.5}{2}=\frac{1.8}{2}=0.9$

البوتاسيوم الغير طبيعي اقل من النسبة لدينا حسب المتباينة $x<3.5$

البوتاسيوم الغير طبيعي اكبر من النسبة لدينا حسب المتباينة $x>5.3$

$x>3.5$ او $x<5.3$

$|x-4.4|>0.9$

$|x-4.4|\le 0.9$ اذا كان المطلوب هو المدى الطبيعي

❻ الزاوية القائمة تتحول الى زاوية حادة او منفرجة اذا تحرك مؤشر الزاوية الى اليمين او الى اليسار في الاقل بدرجة واحدة

Sol

$\frac{91+89}{2}=\frac{180}{2}=90$

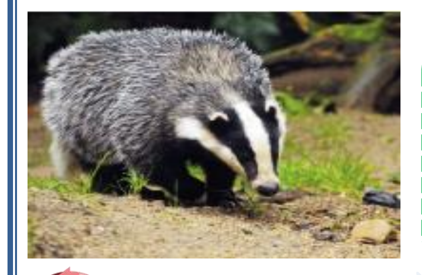
$\frac{91-89}{2}=\frac{2}{2}=1$

الزاوية المنفرجة حسب المتباينة $x\ge 90+1$

الزاوية الحادة حسب المتباينة $x\le 90-1$

$x\ge 91$ او $x\le 89$

$|x-90|\ge 1$



❼ لغرير: حيوان الغرير هو احدى انواع الثديات ، ينتمي الى شعبة الحبليات ويمتلك قوائم قصيرة نوعاً ما ويعيش في الحفر التي يحفرها في الارض ، طول جسمه من الراس الى الذيل يصل ما بين $68cm$ و $76cm$

اكتب مدى طول الغرير .

Sol

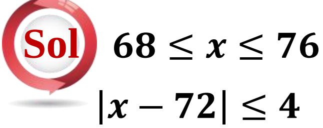
$\frac{76+68}{2}=\frac{144}{2}=72$

$\frac{76-68}{2}=\frac{8}{2}=4$

نفرض طول الغرير x فتكون المتباينة

$68\le x\le 76$

$|x-72|\le 4$





❽ صحة: معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح من 60 الى 90 نبضة في الدقيقة . اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الانسان ؟

Sol

$\frac{90+60}{2}=\frac{150}{2}=75$

$\frac{90-60}{2}=\frac{30}{2}=15$

عدد النبضات الغير طبيعية الاقل من الحد الادنى للنبض الطبيعي كما في المتباينة $x<60$

عدد النبضات الغير طبيعية الاكثر من الحد الاعلى للنبض الطبيعي كما في المتباينة $x>90$

$x<60$ او $x>90$

$|x-75|>15$

$|x-75|\le 15$ اذا كان المطلوب عدد الدقات الطبيعي لقلب الانسان




⑨ **مواصلات**: تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح ما بين $8km$ الى $10km$ اذ تعد منطقة جوية معتدلة . اكتب مدى منطقة الطيران المدنية؟

$\frac{10+8}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$\frac{10-8}{2} = \frac{2}{2} = 1$

نفرض ان منطقة الطيران المدنية x كما في المتباينة

Sol $8 \le x \le 10$

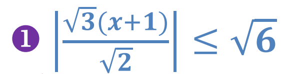
$|x-9| \le 1$

$|x-9| > 1$ اذا كان المطلوب هو منطقة الطيران الغير مدنية





تحدٍ: حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الاعداد .



❶ $\left|\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}\right| \le \sqrt{6}$

Sol $\left|\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}\right| \le \sqrt{6}$

$-\sqrt{6} \le \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \le \sqrt{6}$

للتخلص من مقام المتغير نضرب كل الحدود في $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}(-\sqrt{6}) \le \sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}\right) \le \sqrt{2}(\sqrt{6})$

$-\sqrt{12} \le \sqrt{3}(x+1) \le \sqrt{12}$

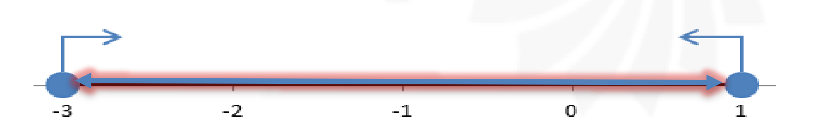
$\frac{-\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \le \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{3}} \le \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

نقسم كل حد في المتباينة على $\sqrt{3}$

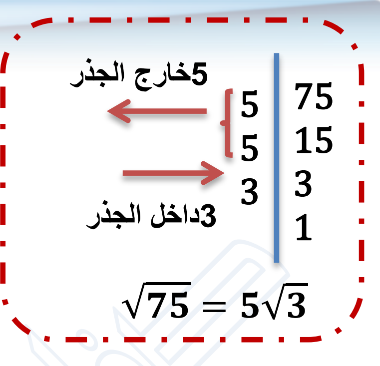
$\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \le x+1 \le \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$-2 \le x+1 \le 2 \Rightarrow -2-1 \le x \le 2-1 \Rightarrow -3 \le x \le 1$

$S = \{x: -3 \le x \le 1\}$



❷ $\left|\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}}\right| \geq \sqrt{15}$



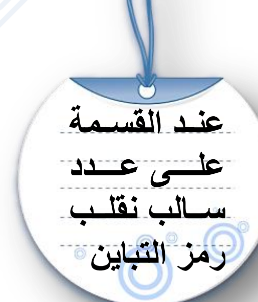
Sol $\left|\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}}\right| \geq \sqrt{15}$

$\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \geq \sqrt{15}$ او $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}} \leq -\sqrt{15}$

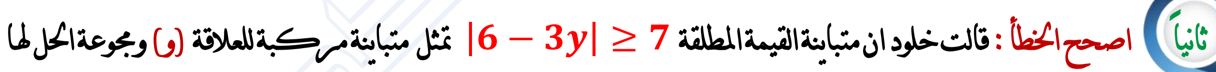
$\sqrt{5}.\left(\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}}\right) \geq \sqrt{5}.\sqrt{15}$ او $\sqrt{5}.\left(\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}y}{\sqrt{5}}\right) \leq -\sqrt{5}.\sqrt{15}$

$\sqrt{12}-\sqrt{3}y \geq \sqrt{75}$ او $\sqrt{12}-\sqrt{3}y \leq -\sqrt{75}$

$\sqrt{12}-\sqrt{3}y \geq 5\sqrt{3}$	$\sqrt{12}-\sqrt{3}y \leq -5\sqrt{3}$
$-\sqrt{3}y \geq 5\sqrt{3}-\sqrt{12}$	$-\sqrt{3}y \leq -5\sqrt{3}-\sqrt{12}$
$-\sqrt{3}y \geq 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}y \leq -5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$
$-\sqrt{3}y \geq 3\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}y \leq -7\sqrt{3}$
$\frac{-\sqrt{3}y}{-\sqrt{3}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$	$\frac{-\sqrt{3}y}{-\sqrt{3}} \geq \frac{-7\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$
$y \leq -3$	$y \geq 7$



$S = s_1 \cup s_2 = \{y: y \leq -3\} \cup \{y: y \geq 7\}$





اصحح الخطأ : قالت خلود ان متباينة القيمة المطلقة $|6-3y| \geq 7$ تمثل متباينة مركبة للعلاقة (و) ومجموعة الحل لها $\left\{y: -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{13}{1}\right\}$ بين خطأ خلود وصححه .



Sol $|6-3y| \geq 7$

نوع المتباينة ومجموعة حلها



المتباينة تتضمن الاداة (او) وليس (و)

$6-3y \geq 7$ او $6-3y \leq -7$

$-3y \geq 7-6$	$-3y \leq -7-6$
$-3y \geq 1$	$-3y \leq -13$
$\frac{-3y}{-3} \leq \frac{1}{-3}$	$\frac{-3y}{-3} \geq \frac{-13}{-3}$
$y \leq -\frac{1}{3}$	$y \geq \frac{13}{3}$

$S = s_1 \cup s_2 = \left\{y: y \geq \frac{13}{3}\right\} \cup \left\{y: y \leq -\frac{1}{3}\right\}$



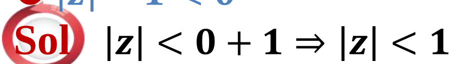
حس عددي : اكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الاعداد الحقيقية .



H.W



❶ $|z| - 1 < 0$



Sol $|z| < 0 + 1 \Rightarrow |z| < 1$

$-1 < z < 1 \qquad S = \{z: -1 < z < 1\}$



❷ $|x - 1| > 0$



رابعاً اكتب : متباينه قيمة مطلقه تمثل موقفاً من واقع الحياة ومثل مجموعة الحل على مستقيم الاعداد



Sol

راجع اي مثال من امثلة المسائل الحياتية

الاختيار من متعدد Multiple Choice

الدرس [1-5] متباينات القيمة المطلقة

Absolute Value Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

1. 4) $|y - 8| < 13$ a) $5 < y < -21$ b) $-5 \le y \le 21$ ✓ c) $-5 < y < 21$ d) $-5 < y \le 21$
2. $|3z| - 7 < 1$ a) $-\frac{8}{3} \le x < \frac{8}{3}$ b) $-\frac{8}{3} < x \le \frac{8}{3}$ c) $-\frac{8}{3} \le x \le \frac{8}{3}$ ✓ d) $-\frac{8}{3} < x < \frac{8}{3}$
3. $|3 - x| < 3$ a) $-6 < x < 0$ ✓ b) $0 < x < 6$ c) $-6 < x < 6$ d) $0 \le x \le 6$
4. $|5t - 5| > 0$ a) $t \le 1$ أو $t > 1$ b) $t \ge 1$ أو $t < -1$ ✓ c) $t > 1$ أو $t < 1$ d) $t > -1$ أو $t < -1$
5. $|v - 3| \ge \frac{1}{2}$ a) $v \le \frac{7}{2}$ أو $v \le \frac{-5}{2}$ b) $v \ge \frac{7}{2}$ أو $v \ge \frac{-5}{2}$ ✓ c) $v \ge \frac{7}{2}$ أو $v \le \frac{5}{2}$ d) $v \le \frac{7}{2}$ أو $v \ge \frac{-5}{2}$
6. $|6 - 3y| \ge 9$ a) $y \le 1$ أو $y \ge -5$ b) $y < -1$ أو $y > 5$ c) $y > -1$ أو $y < 5$ ✓ d) $y \le -1$ أو $y \ge 5$
7. $|\frac{7 - 2y}{3}| \ge 3$ ✓ a) $y \le -1$ أو $y \ge 8$ b) $y < -1$ أو $y \ge 8$ c) $y < -1$ أو $y > 8$ d) $y < -1$ أو $y > 8$
8. $|\frac{z - 1}{7}| \le 2$ a) $-13 < z \le 15$ b) $-13 \le z < 15$ ✓ c) $-13 \le z \le 15$ d) $-13 < z < 15$





خطة حل المسألة (افهم المسألة)

توجد اربعة اعمدة اساسية في حل هذا الموضوع

أفهم

ما المعطيات في المسألة ؟ هي كل معلومة او عدد او نسبة مرتبطة مباشرةً بالمطلوب من المسألة .

ما المطلوب من المسألة ؟ اي مطلب يعطى في المسألة ويرتبط بالمعطيات ويأتي المطلوب من المسألة بعد كلمة (جد او اكتب) .



كيف تحل المسألة ؟ نكون متباينة لإيجاد المطلوب من المسالة باستخدام المعطيات في المسألة .



بعد ان كونا متباينة في خطط ، نحل المتباينة ونجد مجموعة الحل .



هو ان تتحقق من صحة حلك باستعمال مستقيم الاعداد وتمثيل مجموعة الحل عليه .

ملاحظة : ❶ اذا اعطى في المسألة نسبة مئوية نسبة مباشرةً نضع النسبة داخل متباينة القيمة المطلقة مطروحة من x .

❷ اذا اعطى قيمتين في المسألة واحدة تمثل اكبر قيمة والثانية تمثل اصغر قيمة نستخدم قانون ايجاد المنتصف بجمع العدد اكبر والعدد الاصغر ونقسمها على 2 ثم نجد عدد الوحدات بأستخدام قانون طرح العدد الاكبر من العدد الاصغر ونقسمها على 2 .

مثال 1 حل المسائل التالية باستراتيجية أفهم المسألة .



❶ أظهرت دراسة مسحية أن 62% من الشباب يمارسون رياضة كرة القدم ، فإذا كان هامش الخطأ ضمن 4 نقاط مئوية . فجد مدى النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .

الحل

أفهم

معطيات المسألة : 62% من الشباب يمارسون رياضة كرة القدم ، هامش الخطأ هو 4 نقاط .

المطلوب من المسألة : إيجاد مدى النسبة المئوية التي تمثل الشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .

خطط

كيف تحل المسألة : بما ان النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون كرة القدم هي 62% وهامش الخطأ هو اقل من او يساوي 4% ستكون المتباينة $|x-62| \le 4$ حيث x تمثل النسبة الفعلية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .

حل



نجد مجموعة الحل لمتباينة القيمة المطلقة :

$$|x-62| \le 4 \Rightarrow -4 \le x-62 \le 4$$

$$-4+62 \le x \le 4+62$$

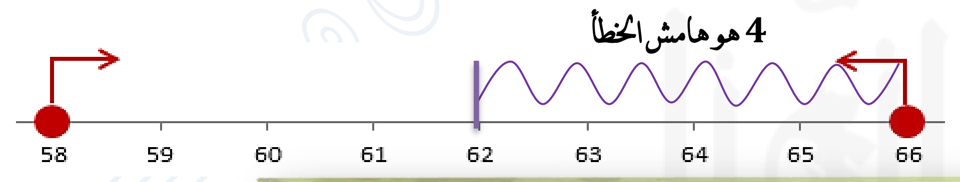
$$58 \le x \le 66$$

$$S = \{x : 58 \le x \le 66\}$$ مدى نسبة الشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم

تحقق



نستعمل مستقيم الاعداد للتحقق من صحة الحل :



ملاحظة : لو كان المطلوب في السؤال هو ايجاد نسبة الشباب الذين لا يمارسون رياضة كرة القدم .

فتكون المتباينة $|x-38| \le 4$ لأنه $38\% = 62\% - 100\%$.

نسبة الذين لا يمارسون الرياضة — نسبة الذين يمارسون الرياضة — النسبة الكلية






❷ **خلية النحل** : لاحظ انور من خلال دراسة مسحية على خلية نحل ان 88% من ذكور النحل يطردون من الخلية في نهاية الصيف فإذا كان هامش الخطأ 3 نقاط مئوية .

جد مدى النسبة المئوية لذكور النحل الذين يطردون من الخلية ؟



أفهم

معطيات المسألة : 88% من ذكور النحل يطردون من الخلية في نهاية الصيف وكان هامش الخطأ 3 نقاط .

المطلوب من المسألة : أيجاد مدى النسبة المئوية لذكور النحل الذين يطردون من الخلية في نهاية الصيف .



كيف تحل المسألة : بما ان نسبة ذكور النحل الذين يطردون هي 88% وهامش الخطأ هو اقل او يساوي 3% لذا

نكون المتباينة $|x - 88| \leq 3$ حيث x تمثل نسبة الذكور الذين يطردون في نهاية الصيف .

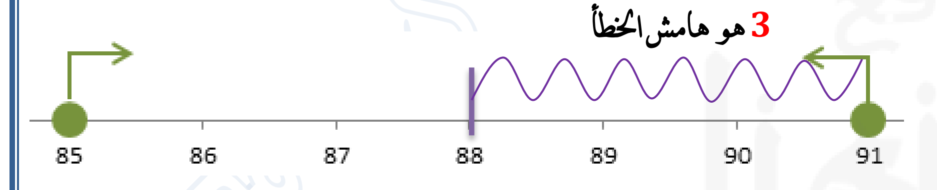
حل

نجد مجموعة الحل لمتباينة القيمة المطلقة :

$$|x - 88| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x - 88 \leq 3$$
$$-3 + 88 \leq x \leq 3 + 88$$
$$85 \leq x \leq 91$$
$$S = \{x: 85 \leq x \leq 91\}$$

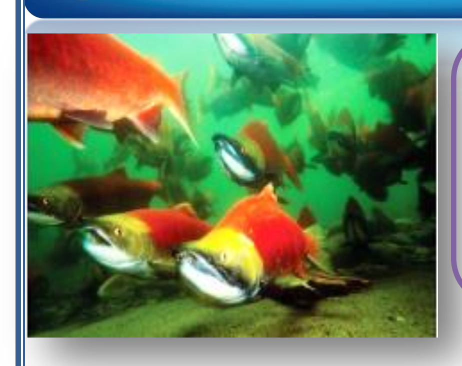


نستعمل مستقيم الاعداد للتحقق من صحة الحل :



ملاحظة : لو كان المطلوب في المسألة هو ايجاد مدى نسبة الذكور الذين لا يطردون من الخلية

لكانت المتباينة $|x - 12| \leq 3$ لأنه $100 - 88 = 12$.



③ **سمك السلمون** : متوسط عمر سمك السلمون من سنتين الى ثمان سنوات كما انه يكون مهدد بالخطر عند ارتفاع درجة حرارة المياه فهو يعيش في درجة حرارة تتراوح بين 20 درجة سيليزية الى 23 درجة سيليزية . اكتب متباينة تمثل درجة حرارة المياه التي لا يعيش فيها سمك السلمون .

الحل

أفهم

معطيات المسألة : يعيش سمك السلمون في درجة حرارة تتراوح بين 20 الى 23 درجة سيليزية .

المطلوب من المسألة : ايجاد متباينة تمثل درجة حرارة المياه التي لا يعيش فيها السلمون .

خطط

كيف تحل المسألة : بما ان سمك السلمون يعيش في درجة حرارة 20 الى 23 والمطلوب هو ايجاد درجات الحرارة التي لا يعيش فيها سمك السلمون يعني ان $x > 23$ او $x < 20$ لذا نكون متباينة القيمة المطلقة $|x - 21.5| > 1.5$

حيث x تمثل درجة الحرارة .

$$\frac{23+20}{2} = \frac{43}{2} = 21.5$$

$$\frac{23-20}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

حل

نجد مجموعة الحل لمتباينة القيمة المطلقة :

$|x - 21.5| > 1.5 \Rightarrow x - 21.5 > 1.5$ او $x - 21.5 < -1.5$

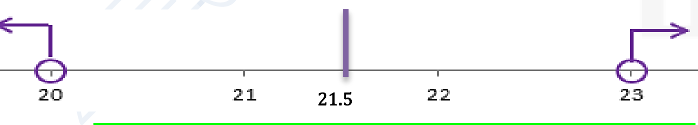
$x > 1.5 + 21.5$ او $x < -1.5 + 21.5$

$x > 23$ او $x < 20$

$S = s_1 \cup s_2 = \{x : x > 23\} \cup \{x : x < 20\}$

تحقق

نستعمل مستقيم الاعداد للتحقق من صحة الحل :

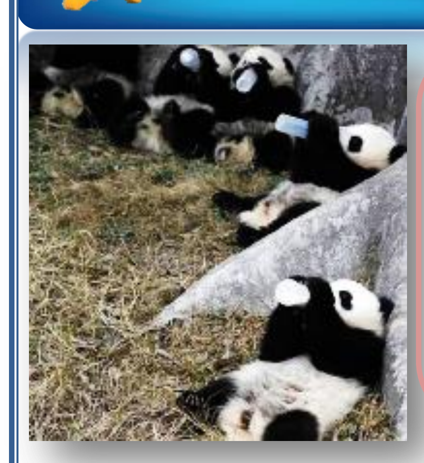


بما ان المطلوب هو ايجاد درجات الحرارة التي لا يعيش فيها سمك السلمون (يعني المطلوب اكبر من الحد الاعلى واصغر من الحد الادنى)

فنضع علامة اكبر فقط (>) .





❹ **دب الباندا** : الباندا العملاقة هو نوع مختلف عن باقي الدببة فهي تمتلك فرواً يختلف لونه في بعض المناطق فجسمها كله ابيض عدا الاذنين والعينين والساقين والذراعين والكتفين فهي اسود وتلد الانثى صغيراً واحداً او اثنين ويحتاج الصغير حليب امه لأكثر من (6 الى 14) مرة في اليوم ، صغار الباندا العملاقة تزن بين ($40kg$ الى $60kg$) في عام واحد ، ويعيشون مع امهاتهم حتى سنتين من العمر

اكتب متباينة تمثل وزن صغير الباندا عندما يكون عمره سنة واحدة؟



الحل

أفهم

معطيات المسألة : تزن الباندا بين ($40kg$ الى $60kg$) في عام واحد .

المطلوب من المسألة : ايجاد متباينة تمثل وزن الباندا عندما يكون عمره سنة واحدة .



خطط

كيف تحل المسألة : بما ان وزن الباندا بين ($40kg$ الى $60kg$) لذا نكون متباينة القيمة المطلقة $|x - 50| \leq 10$ حيث x تمثل وزن الباندا .

$$\frac{60 + 40}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

$$\frac{60 - 40}{2} = \frac{20}{2} = 10$$



حل

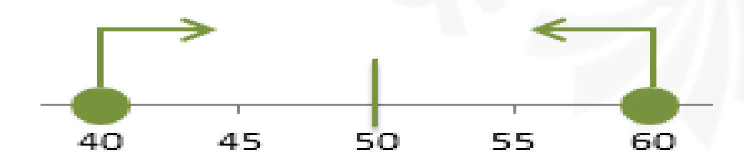
نجد مجموعة الحل لمتباينة القيمة المطلقة :

$$|x - 50| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq x - 50 \leq 10$$
$$-10 + 50 \leq x \leq 10 + 50$$
$$40 \leq x \leq 60$$
$$S = \{x: 40 \leq x \leq 60\}$$



تحقق

نستعمل مستقيم الاعداد للتحقق من صحة الحل :





5 التلفريك : التلفريك او المعبر الهوائي وهو من ارخص وأبسط وسائل النقل يعمل بالكهرباء ويعد واسطة نقل في الدول التي تكثر فيها الجبال والأسطح الوعرة وتلجأ اليه بعض الدول أيضاً كوسيلة للترفيه ومشاهدة المناظر كما في شمال العراق . اقل سرعة لعربات التلفريك $20km/h$ واكبر سرعة $40km/h$. اكتب متباينة القيمة المطلقة تبين مدى سرعة عربات التلفريك ؟

الحل

أفهم

معطيات المسألة : أقل سرعة لعربات التلفريك هي $20km/h$ واكبر سرعة هي $40km/h$.

المطلوب من المسالة : ايجاد متباينة القيمة المطلقة تبين مدى سرعة عربات التلفريك .

خطط

كيف تحل المسألة : بما ان سرعة العربات تتراوح بين $20km/h$ الى $40km/h$

لذا تكون متباينة القيمة المطلقة $|x-30| \leq 10$ حيث x تمثل سرعة العربات .

حل

نجد مجموعة الحل لمتباينة القيمة المطلقة :

$$\frac{40-20}{2}=\frac{20}{2}=10$$

$$\frac{40+20}{2}=\frac{60}{2}=30$$

$|x-30| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq x-30 \leq 10$

$-10+30 \leq x \leq 10+30$

$20 \leq x \leq 40$

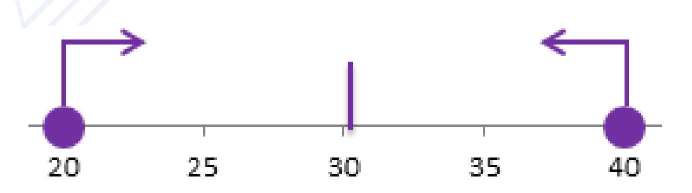
$S=\{x: 20 \leq x \leq 40\}$





تحقق

نستعمل مستقيم الاعداد للتحقق من صحة الحل :



الفصل الثاني

المقادير الجبرية

1. ضرب المقادير الجبرية
2. التحليل بالعامل المشترك
3. التحليل بالمطابقات
4. التحليل بالتجربة
5. التحليل بالفرق او مجموع مكعبين
6. تبسيط المقادير النسبية
7. خطة حل المسألة

للتواصل زيارة صفحات السلسلة :





سلسلة الناجح في الرياضيات



مراجعة للصف الثاني متوسط

تعلمنا سابقا ماهو الحد الجبري وماهو المقدار الجبرية . وكيف يتم جمع او طرح او ضرب **(حد جبري × مقدار جبري)** او قسمة الحدود الجبرية وسنتذكر بعض الامثلة .

الحد الجبري: هو حد يتكون من قسمين الاول رقم والثاني حرف مثل $7rv^2$ ، $3x$

المقدار الجبري: يتكون من اكثر من حد جبري مثل $3ty+x,\ 2x^2-w$

اولاً: جمع وطرح المقادير الجبرية:

في عملية الجمع نقوم بجمع الحدود المتشابه فقط . ولا نستطيع ان نجمع الحدود المختلفة

❶ $(3x^2+4x-12)+(2x^2-6x+10)$

$=5x^2-2x-2$

❷ $(3\sqrt{5}xy+y+4x)-(\sqrt{20}xy+y-2x)$

$=(3\sqrt{5}xy+y+4x)+(-\sqrt{20}xy-y+2x)$

$=(3\sqrt{5}-2\sqrt{5})xy+y-y+(4+2)x$

$=\sqrt{5}xy+6x$

تحذف الحدود مع بعضها اذا كانت متشابه في كل شيء ومختلفة في الاشارات

في عملية الطرح ندخل الاشارة السالبة على القوس الثاني (عند دخولها تقلب الاشارات كلها) ثم تقلب عملية الطرح الى الجمع

20	2	2 خارج
10	2	
5	5	داخل
1		

$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

❸ $\left(\frac{1}{2}zy+5z-7y\right)-\left(\frac{1}{4}zy-3z+2y\right)$

$=\left(\frac{1}{2}zy+5z-7y\right)+\left(-\frac{1}{4}zy+3z-2y\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)zy+8z-9y$

$=\frac{1}{4}zy+8z-9y$

توحيد مقامات

$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}-\frac{1}{4}$

$=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$

ثانيا: ضرب حدجبري في مقدار جبري:

نقوم بتوزيع خارج القوس على داخلة ثم

نضرب كل (رقم× رقم) أي (معامل × معامل)

وكل (حرف مع حرف) اي (متغير × متغير)

❶ $2x(x^2+2)=2x^3+4x$

❷ $-2(x^3+2x-3)=-2x^3-4x+6$

❸ $3x^2(2x^3z-x^2+2y)=6x^5z-3x^4+6x^2y$



ثالثاً: قسمة المقادير الجبرية:



❶ $\frac{3xy^2}{15x^2y}$

$= \frac{3xy^2}{{}^{5}15x^2y} = \frac{y}{5x}$

❷ $\frac{12m^4n^3 - 8m^3n^3}{4mn}$ نجزئ الكسر الى كسرين $= \frac{{}^{3}12m^{4\,3}n^{3\,2}}{4mn} - \frac{{}^{2}8m^{3\,2}n^{3\,2}}{4mn}$

$= 3m^3n^2 - 2m^2n^2$



ضرب المقادير الجبرية

في هذه الدرس سنتعلم كيف نضرب مقدار جبري في مقدار جبري .وهناك بعض المسميات للمقادير الجبرية التي يجب حفظها .

اولاً مربع الحدانية :وهي قوسين متشابهين في كل شيء(الحدود)او قوس اسه تربيعي .ويمكن ضربها بطرقتين (بالتوزيع) او (بالقانون)

$(x \pm y)^2 = (x \pm y)(x \pm y) = x^2 \pm 2xy + y^2$ الطريقة الاولى بالتوزيع

الطريقة الثانية بالقانون

$($الحد$1 \pm$ الحد$2)^2 = ($الحد$1)^2 \pm 2($الحد$1)($الحد$2) + ($الحد$2)^2$

نفس اشارة الوسط — موجب دائما

مثال : جد ناتج ضرب المقادير الجبرية التالية .

❶ $(z+5)^2 \Rightarrow = (z+5)(z+5) \Rightarrow = z^2 + 5z + 5z + 25 \Rightarrow = z^2 + 10z + 25$

او نجد الحل بالقانون .... $(z+5)^2 = (z)^2 + 2(z)(5) + (5)^2 \Rightarrow = z^2 + 10z + 25$ نلاحظ نفس الناتج في الطريقتين

❷ $(\sqrt{7} - h)^2$

سوف نجد الناتج بالقانون مباشرةً $(\sqrt{7})^2 = \sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$

$= (\sqrt{7})^2 - 2(\sqrt{7})(h) + (h)^2$

$= 7 - 2\sqrt{7}h + h^2$

نرتب الحدود حسب اكبر اس $= h^2 - 2\sqrt{7}h + 7$

ثانياً الفرق بين مربعين:

وهي قوسين متشابهين في كل شيء ماعدا اشارة الحد الوسط مختلفة وتكون بالصوره $x^2 - y^2$

الحالة الاولى بالتوزيع ويمكن ارجاعها بالصورة العكسية

$$(x-y)(x+y) = (x)^2 + xy - yx - (y)^2 = x^2 - y^2$$

الحالة الثانية بالقانون ويمكن ارجاعها بالصورة العكسية

$$(x-y)(x+y) = (x)^2 - (y)^2 = x^2 - y^2$$

نضع الاشارة السالبة دائماً

مثال: جد ناتج ضرب المقادير الجبرية التالية.

❶ $(2x-7)(2x+7)$

$= 4x^2 + 14x - 14x - 49 = 4x^2 - 49$

او نجد الناتج بالقانون مباشر ..فيكون نفس الناتج

$(2x-7)(2x+7) = (2x)^2 - (7)^2 = 4x^2 - 49$

بالقانون مباشر

❷ $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})$

$= (y)^2 - (\sqrt{6})^2 = y^2 - 6$

ثالثاً مجموع او الفرق بين مكعبين :

وهي تكون على قوسين الاول صغير والثاني كبير وفق شروط معينه او بالصورة $x^3 \pm y^3$

$$x^3 \pm y^3 = \left(\sqrt[3]{x^3} \pm \sqrt[3]{y^3}\right)\left((\sqrt[3]{x^3})^2 \mp \left(\sqrt[3]{x^3}\right)\left(\sqrt[3]{y^3}\right) + \left(\sqrt[3]{y^3}\right)^2\right)$$

فيكون الناتج بعد تطبيق التعريف

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

ويمكن ارجاع العكس مباشرةً بالقانون بدون استخدام التوزيع

$$(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) = x^3 \pm y^3$$

مثال: جد ناتج ضرب المقادير الجبرية التالية.

❶ $(x+2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 - 2x^2 + 4x + 2x^2 - 4x + 8 = x^3 + 8$

او نجد الحل مباشرة بالقانون . بعد تطبيق شروط مجموع مكعبين . . . (نكعب الحد الاول ونأخذ اشارة الوسط ونكعب الحد الثاني) من القوس الصغير

$(x+2)(x^2 - 2x + 4) = (x)^3 + (2)^3 = x^3 + 8$

نلاحظ ان الناتج نفسه بالطريقتين



نجد ناتج الفرق بين مكعبين بالقانون مباشرة

❷ $\left(\frac{1}{3}-z\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}z+z^2\right)$

$=\left(\frac{1}{3}\right)^3-(z)^3=\frac{1}{27}-z^3$

رابعاً مكعب حدانية :وهي عباره عن قوس صغير اسه تكعيبي $(x\pm y)^3$. ويضرب بتجزئته الى قوسين

$(x\pm y)^3=(x\pm y)\,(x\pm y)^2$

ثم نفتح القوس التربيعي بقانون مربع الحدانية ثم نضرب القوس الثاني فيه

مثال:جد ناتج ضرب المقادير الجبرية التالية.

❶ $(y+2)^3$

نفتحها بمربع حدانية

$(y+2)^3=(y+2)\,(y+2)^2$

بالتوزيع

$=(y+2)(y^2+4y+4)$

ثم نجمع الحدود المتشابهة

$=y^3+4y^2+4y+2y^2+8y+8$

$=y^3+6y^2+12y+8$

❷ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^3=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{2}{2}x+\frac{1}{4}\right)$

$=x^3+x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

$=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$

$\frac{2}{2}=1$

$x^2+\frac{1}{2}x^2=\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2=\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)x^2=\frac{3}{2}x^2$

$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$

خامساً اذاكانت المقادير لاتشبه الحالات الأربعة السابقة : نستخدم طريقة ضرب (مقدار) في (مقدار) بالتوزيع .

مثال : جد ناتج ضرب المقادير التالية

❶ $(3y+1)(y+1)$

$=(3y)(y)+(3y)(1)+(1)(y)+(1)(1)$

$=3y^2+3y+y+1$

$=3y^2+4y+1$

❷ $(n-\sqrt{3})(5n-\sqrt{3})$

$=(n)(5n)-(n)(\sqrt{3})-(\sqrt{3})(5n)+(\sqrt{3})(\sqrt{3})$

$=5n^2-\sqrt{3}n-5\sqrt{3}n+3$

$=5n^2-6\sqrt{3}n+3$

ملاحظة:

كل الحالات السابقة نستطيع ايجاد ناتج ضربها بطريقة التوزيع ولكن للسهولة وضعنا قانون لكل حالة




مثال: جد ناتج ضرب المقادير التالية

❶ $(v+\sqrt{2})(v-\sqrt{2})$

$=(v)^2-(\sqrt{2})^2$

$=v^2-2$

فرق بين مربعين كيف عرفت ؟ لا نها قوسين متشابهين ومختلفين بالإشارة . تحل بالقانون مباشرة

❷ $(x+\sqrt{8})^2$

$=(x)^2+2(x)(\sqrt{8})+(\sqrt{8})^2$

$=x^2+2\sqrt{8}x+8$

مربع حدانية . كيف عرفت؟ لأنه . قوس اسه تربيعي. ويحل بالقانون مباشرةً

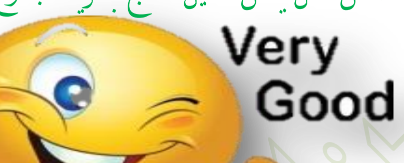
❸ $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}+m\right)\left(\sqrt[3]{\frac{4}{49}}-\sqrt[3]{\frac{2}{7}}m+m^2\right)$

$=\left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)^3+(m)^3$

$=\frac{2}{7}+m^3$

مجموع مكعبين. كيف عرفت ؟ لانهما قوسين صغير وكبير مكونان وفق شروط مجموع مكعبين. يحل بالقانون مباشرةً

وللتأكد من الحل يمكن تحليل الناتج بطريقة مجموع مكعبين



❹ $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\frac{1}{h}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{81}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\frac{1}{h}+\frac{1}{h^2}\right)$

$=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^3+\left(\frac{1}{h}\right)^3$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{h^3}$

مجموع مكعبين. كيف عرفت ؟ لانهما قوسين صغير وكبير مكونان وفق شروط مجموع مكعبين. يحل بالقانون مباشرةً

❺ $(z-\sqrt{5})^3$

مكعب حدانية لأنه قوس اسه تكعيبي

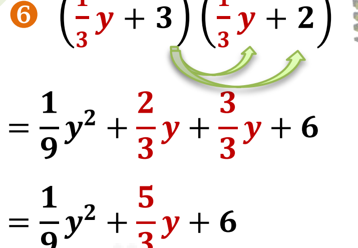
$=(z-\sqrt{5})\,(z-\sqrt{5})^2$

$=(z-\sqrt{5})(z^2-2\sqrt{5}\,z+5)$

$=z^3-2\sqrt{5}z^2+5z-\sqrt{5}z^2+10z-5\sqrt{5}$

$=z^3-3\sqrt{5}z^2+15z-5\sqrt{5}$

❻ $\left(\frac{1}{3}y+3\right)\left(\frac{1}{3}y+2\right)$



لاتشبه أي حالة . لأنه قوسين مختلفين .تحل بالتوزيع

$=\frac{1}{9}y^2+\frac{2}{3}y+\frac{3}{3}y+6$

$=\frac{1}{9}y^2+\frac{5}{3}y+6$



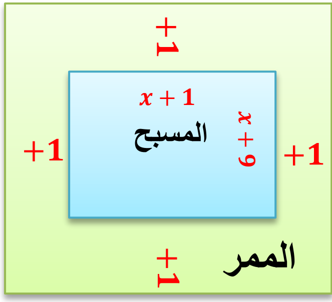
H.W جد ناتج ضرب المقادير التالية

❶ $(V+\sqrt{3})^2$ ans $=v^2+2\sqrt{3}\,v+3$	❷ $(z+\sqrt{5})(z-\sqrt{5})$ ans $=z^2-5$	❸ $(8+h)(3+h)$ ans $=24+11h+h^2$
❹ $(3x-4)(x+5)$ ans $=3x^2+11x-20$	❺ $(z-2\sqrt{7})(2z-\sqrt{7})$ ans $=2z^2-5\sqrt{7}z+14$	❻ $\left(\frac{2}{3}-r\right)\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}r+r^2\right)$ ans $=\frac{8}{27}-r^3$
❼ $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}+n\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{25}}-\sqrt[3]{\frac{1}{5}}n+n^2\right)$ ans $=\frac{1}{5}+n^3$	❽ $(z-\sqrt{5})^3$ ans $=z^3-3\sqrt{5}z^2+15z-5\sqrt{5}$	❾ $(x-\sqrt[3]{4})(x^2+\sqrt[3]{4}x+\sqrt[3]{16})$ ans $=x^3-4$





1 مسبح: يعد فندق بغداد احد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد حيث يبلغ طول المسبح فيه $x + 9$ متر . وعرضه $x + 1$ متر . محاط بممر عرضه 1 متر . اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورةبدلالة x ؟



الجواب

مساحة المسبح مع الممر =(العرض)(الطول)

طول المسبح + الممر = $x + 9 + 2 = x + 11$

عرض المسبح + الممر = $x + 1 + 2 = x + 3$

مساحة المسبح مع الممر $= (x + 3)(x + 11)$

مساحة المسبح مع الممر $= x^2 + 3x + 11x + 33$

مساحة المسبح مع الممر $= x^2 + 14x + 33$ متر

---

2 حديقة : حوطت حديقة منزلية مربعة الشكل طول ضلعها h متر . بممر عرضه 1 متر . ما مساحة الممر بدلالة h ؟



طول ضلع الحديقة + الممر $= h + 2$

+1
h
1 + h الحديقة +1
الممر
+1

مساحة الحديقة مع الممر = (الطول)(العرض)= $(h + 2)(h + 2) = (h + 2)^2$

مساحة الحديقة مع الممر = $h^2 + 4h + 4$ متر

ولكن المطلوب هو مساحة الممر

نجد مساحة الحديقة = $(h)(h) = h^2$

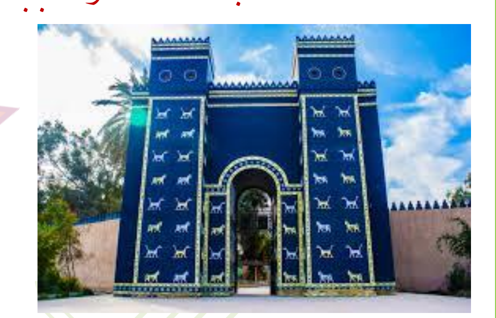
مساحة الحديقة + مساحة الممر = مساحة الحديقة مع الممر

h^2 + مساحة الممر $= h^2 + 4h + 4$

مساحة الممر $= h^2 + 4h + 4 - h^2$

مساحة الممر $= 4h + 4$ متر

❸ **تـأريخ** : رسم وائل لوحة فنية تمثل بوابة عشتار بالأبعاد التالية $(y+7), (y-4)$ سنتمتر.
اكتب مساحة اللوحة بأبسط صورة بدلالة y ؟



أي مساحه هي طول × عرض

Sol: مساحة اللوحة = (الطول)(العرض)

مساحة اللوحة $= (y-4)(y+7)$

مساحة اللوحة $= y^2 + 7y - 4y - 28$

مساحة اللوحة $= y^2 + 3y - 28$ سنتمتر

---

❹ **اسماك زينة** : حوض سمك زينة مكعب الشكل طول ضلعة $(v+3)$ سنتمتر . اكتب حجم حوض الاسماك بأبسط صورة بدلالة v ؟





لأنه مكعب

Sol: حجم الحوض = (الطول)(العرض)(الارتفاع) او $(\text{طول الضلع})^3$

حجم الحوض $= (v+3)^3 = (v+3)(v+3)^2$

مربع حدانية تفتح بالقانون مباشرة

$= (v+3)(v^2+6v+9)$

$= v^3 + 6v^2 + 9v + 3v^2 + 18v + 27$

$= v^3 + 9v^2 + 27v + 27$ سنتمتر

فكـر

اولاً **تحـدِ** جد ناتج كل ممايأتي بأبسط صوره

مربع حدانية تفتح بالقانون مباشرة

$(x+1)^2 - (x-2)^2$

$= (x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 4x + 4)$

$= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4$

$= 6x - 3$



تذكير

الاشارة السالبة توزع على القوس لكي تغير الاشارات





ثانياً اصحح الخطأ

كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبرين كالاتي

$(\sqrt{5}h-4)(h-6)=5h^2+10h-24$ حدد خطأ نسرين ؟ وصححه ؟

Sol: $(\sqrt{5}h-4)(h-6)=\sqrt{5}h^2-6\sqrt{5}h-4h+24$ نجد الحل اولاً ثم نحدد الاخطاء في حل نسرين

خطأ نسرين الاول هو في جمع $-4h$ مع الحد $-6\sqrt{5}h$ والتي لا يمكن جمع عدد صحيح مع جذر

خطأ نسرين الثاني هو في كتابة $5h^2$ وليس $\sqrt{5}h^2$.

ثالثاً حس عددي

اي العددين اكبر ؟ $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ ام $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ وضح اجابتك ؟

Sol: $\sqrt{3}\approx 1.73 \;,\sqrt{2}\approx 1.41$

نعوض قيم الجذور $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ في السؤال ثم نجد اي العددين اكبر بالمقارنة

$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=(1.73+1.41)^2$

$=(3.14)^2\approx 9.86$

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=(1.73-1.41)^2$

$=(0.32)^2\approx 0.1$

اذن $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2>(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

رابعاً اكتب

ناتج ضرب المقدارين الجبرين $\left(2z+\frac{1}{2}\right)\left(2z-\frac{1}{2}\right)$



Sol: $\left(2z+\frac{1}{2}\right)\left(2z-\frac{1}{2}\right)$

$=\left(4z^2-\frac{1}{4}\right)$

فرق بين مربعين لانهما قوسين

متشابهين عدى الاشارات

وتحل بالقانون مباشرة



Multiple Choice **الاختيارُ من متعدد**

الدرس [1-2] ضرب المقادير الجبرية

Multiplying Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر:

1. $(x+5)^2$ a) $x^2-10x+25$ ✓ b) $x^2+10x+25$ c) $x^2+5x+25$ d) $x^2-5x+25$

2. $(z-\sqrt{7})^2$ a) $z^2-7z+49$ b) $z^2+7y+49$ c) $z^2-\sqrt{7}\,z+7$ ✓ d) $z^2-2\sqrt{7}\,z+7$

3. $(x+8)(x-8)$ ✓ a) x^2-64 b) x^2+64 c) x^2+16 d) x^2-16

4. $(3-2z)(3+2z)$ a) $6-4z^2$ ✓ b) $9-4z^2$ c) $6+4z^2$ d) $9+4z^2$

5. $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})$ a) $y^2-\sqrt{12}$ ✓ b) y^2-6 c) $y^2+\sqrt{12}$ d) y^2+6

6. $(2x-3)(x+9)$ ✓ a) $2x^2+15x-27$ b) $2x^2-5x-27$ c) $2x^2-15x+27$ d) $2x^2+15x+27$

7. $(y-2)(y^2+2y+4)$ a) y^3+8 ✓ b) y^3-8 c) y^3-4 d) y^3-16

8. $(\frac{1}{3}-x)(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}x+x^2)$ ✓ a) $\frac{1}{27}-x^3$ b) $\frac{1}{27}+x^3$ c) $\frac{1}{9}+x^3$ d) $\frac{1}{9}-x^3$

9. $(z-2)^3$
   a) $z^3+6z^2+12z+8$ ✓ b) $z^3-6z^2+12z-8$
   c) $z^3+6z^2-12z-8$ d) $z^3-6z^2-12z+8$

10. $(y+\frac{1}{5})^3$
   a) $y^3-\frac{3}{3}y^2+\frac{3}{25}y-\frac{1}{125}$ b) $y^3+\frac{3}{5}y^2-\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$
   ✓ c) $y^3+\frac{3}{5}y^2+\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$ d) $y^3-\frac{3}{5}y^2-\frac{3}{25}y-\frac{1}{125}$







التحليل باستخدام العامل المشترك الأكبر G. C. F

اولاً العامل المشترك الأكبر G. C. F : هو استخراج العوامل المشتركة فقط وبأصغر أس من الحدوديات الجبرية.

مثال

حلل المقادير التالية باستعمال G. C. F وتحقق من صحة الحل

❶ $6x^3 + 9x^2 - 18x$

$$\frac{6x^3}{3x} + \frac{9x^2}{3x} - \frac{18x}{3x} = 3x(2x^2 + 3x - 6)$$

توضيح للحل. لو تلاحظ ان جميع الحدود تحتوي على ارقام وان العامل المشترك بين الارقام هو ال 3 فاستخرجناه عامل مشترك. بينما كل الحدود تحتوي على x فيجب ان نستخرج اصغر اس من بين الحدود. فكان العامل المشترك الأكبر G. C. F لهذه المقدار هو $3x$. ولكتابة المقدار بعد سحب العامل المشترك منه نقوم بإرجاع العامل المشترك على شكل مقام ونقوم باختصاره مع البسط ووضع الناتج في قوس مضروب به العامل المشترك

التحقيق: لكي نتحقق من صحة الحل نقوم بضرب العامل المشترك الذي استخرجناه سابقا باستخدام التوزيع. فيجب ان يكون المقدار الناتج مطابق لمقدار السؤال الاصلي.

$$3x(2x^2 + 3x - 6)$$
$$= 6x^3 + 9x^2 - 18x$$

ماذا تلاحظ؟ المقدار الناتج مطابق للأصل

اذن الحل صحيح

❷ $10 - 15y + 5y^2$

$$\frac{10}{5} - \frac{15y}{5} + \frac{5y^2}{5} = 5(2 - 3y + y^2)$$

هنا العامل المشترك هو رقم 5 فقط لان الحد الاول لا يحتوي متغير فلا نستطيع اخراج عامل مشترك متغير

التحقيق:

$$5(2 - 3y + y^2)$$
$$= 10 - 15y + 5y^2$$



❸ $6v^2(3v - 6) + 18v$

$$= 18v^3 - 36v^2 + 18v$$
$$\frac{18v^3}{18v} - \frac{36v^2}{18v} + \frac{18v}{18v}$$
$$= 18v(v^2 - 2v + 1)$$

نفتح الاقواس اولاً (بالتوزيع) ثم نستخرج العامل المشرك التوزيع يكون عل القوس فقط ولا يشمل ال $18v$ لان لا ينتمي للقوس

التحقيق:

$$= 18v(v^2 - 2v + 1)$$
$$= 18v^3 - 36v^2 + 18v$$



كلما عرفت؟ عرفت انني لا أعرف

④ $\sqrt{8}\,t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}\,tr)$

$= \sqrt{8}\,t^2r + \sqrt{2}tr^2 - \sqrt{2}\sqrt{3}\,tr$

نحلله

$= \frac{2\sqrt{2}\,t^2r}{\sqrt{2}\,tr} + \frac{\sqrt{2}\,tr^2}{\sqrt{2}\,tr} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}\,tr}{\sqrt{2}\,tr}$

$= \sqrt{2}\,tr(2t + r - \sqrt{3})$

نفتح الاقواس ثم نجد العامل المشترك نوزع فقط الحد $\sqrt{2}$ على القوس لان تفصله علامة جمع مع الحد القبلة. نستخرج $\sqrt{2}\,tr$ عامل مشترك لأنه موجود في كل الحدود. ثم نرجعه على شكل مقام للاستخراج القوس

التحقيق:

$= \sqrt{2}\,tr(2t + r - \sqrt{3})$

$= \sqrt{8}\,t^2r + \sqrt{2}tr^2 - \sqrt{2}\sqrt{3}\,tr$

حيث ان $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$

⑤ $\sqrt{12}\,y^2z + \sqrt{2}(\sqrt{6}yz^2 - \sqrt{24}\,yz)$

$= \sqrt{12}\,y^2z + \sqrt{2}\sqrt{6}yz^2 - \sqrt{2}\sqrt{24}\,yz$

$= \frac{2\sqrt{3}\,y^2z}{2\sqrt{3}\,yz} + \frac{2\sqrt{3}yz^2}{2\sqrt{3}\,yz} - \frac{4\sqrt{3}\,yz}{2\sqrt{3}\,yz}$

$= 2\sqrt{3}yz(y + z - 2)$

نفس فكرة السؤال ④

$\sqrt{2}\sqrt{6} = \sqrt{12}$ و $\sqrt{2}\sqrt{24} = \sqrt{48}$

	12
2	6
2	3
3	1

	48
2	24
2	12
2	6
2	3
3	1

4 خارج ، 3 داخل

$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

التحقيق:

$= 2\sqrt{3}yz(y + z - 2)$

$= 2\sqrt{3}\,y^2z + 2\sqrt{3}yz^2 - 4\sqrt{3}yz$

حيث ان $\sqrt{2}\sqrt{6} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

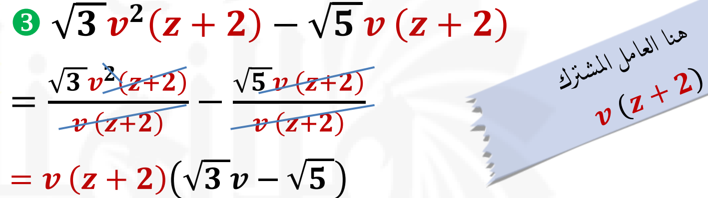
حيث ان $\sqrt{2}\sqrt{24} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

H.W

حلل المقادير التالية باستعمال G. C. F وتحقق من صحة الحل

① $9x^2 - 21x$	② $14x^4 - 21x^3 - 7^2x^2$	③ $10 - 15y + 5y^2$	④ $\sqrt{12}\,n^3r + \sqrt{3}(nr^3 - \sqrt{2}\,nr)$
Ans $= 3x(3x - 7)$	Ans $= 7x^2(2x^2 - 3x - 7)$	Ans $= 5(2 - 3y + y^2)$	Ans $= \sqrt{3}nr(2n^2 + 3r^2 - \sqrt{2})$

ملاحظة ليس من الضروري ان يكون العامل المشترك G. C. F حد واحد فقط ففي بعض الحالات يكون العامل المشترك G. C. F (ثنائي الحد)



مثال حلل كل مقدار باستعمال (ثنائية الحد) كعامل مشترك

① $5x(x + 3) - 7(x + 3)$

$= \frac{5x(x+3)}{(x+3)} - \frac{7(x+3)}{(x+3)}$

$= (x + 3)(5x - 7)$

هل تلاحظ ؟ ان المقدار $(x + 3)$ موجود في الحدين اذن هو يمثل عامل مشترك ثنائي الحد. نسحبه ثم نعيده على شكل مقام للاستخراج القوس الثاني

③ $\sqrt{3}\,v^2(z + 2) - \sqrt{5}\,v\,(z + 2)$

$= \frac{\sqrt{3}\,v^2(z+2)}{v\,(z+2)} - \frac{\sqrt{5}\,v\,(z+2)}{v\,(z+2)}$

$= v\,(z + 2)(\sqrt{3}\,v - \sqrt{5})$

هنا العامل المشترك $v\,(z + 2)$

② $\frac{1}{2}(y - 1) - \frac{1}{3}y^2(y - 1)$

$= \frac{\frac{1}{2}(y-1)}{(y-1)} - \frac{\frac{1}{3}y^2(y-1)}{(y-1)}$

$= (y - 1)(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}y^2)$

هنا العامل المشترك $(y - 1)$

④ $\frac{2}{3}(y + 5) + \frac{1}{3}y\,(y + 5)$

$= \frac{\frac{2}{3}(y+5)}{\frac{1}{3}(y+5)} + \frac{\frac{1}{3}y\,(y+5)}{\frac{1}{3}(y+5)}$

$= \frac{1}{3}(y + 5)(2 + y)$

العامل المشترك هو $\frac{1}{3}(y + 5)$ لان الحد $(y + 5)$ موجود في الحدين بينما ال$\frac{1}{3}$ موجود في حد وموجوده في الثاني لكن بهذه الصيغة $\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$ فعندما نحسب $\frac{1}{3}$ تبقى 2 فقط

H.W حلل كل مقدار باستعمال (ثنائية الحد) كعامل مشترك

❶ $3y(y-4)-5(y-4)$	❷ $\sqrt{2}n(x+1)-\sqrt{3}m(x+1)$	❸ $\sqrt{5}z(z^2-1)-\sqrt{2}z^2(z^2-1)$	❹ $\frac{1}{7}(y+1)-\frac{1}{3}y^2(y+1)$
Ans $=(y-4)(3y-5)$	Ans $=(x+1)(\sqrt{2}n-\sqrt{3}m)$	Ans $=z(z^2-1)(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,z)$	Ans $=(y+1)(\frac{1}{7}-\frac{1}{3}y^2)$

ثـــانيـاً تحليل مقدار جبري باستعمال خاصية التجميع

: خاصية التجميع هي خاصية تستخدم في تحليل المقادير الجبريه المتكونه من اربع حدود بحيث يوجد للحدود التي تريد تجميعها عوامل مشتركة.

شرط استخدام هذه الخاصية هو ان يتكون المقدار الجبري من اربع حدود

مثـــــال حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل

❶ $4x^3-8x^2+5x-10$

$=(4x^3-8x^2)+(5x-10)$

$=(\frac{4x^3}{4x^2}-\frac{8x^2}{4x^2})+(\frac{5x}{5}-\frac{10}{5})$

$=\frac{4x^2(x-2)}{(x-2)}+\frac{5(x-2)}{(x-2)}$

$=(x-2)(4x^2+5)$

نقوم بتجميع الحدود التي لها عوامل مشتركه في قوسين بينهما علامة جمع

ثم نستخرج العوامل المشتركة من القوسين ليتكون لنا عامل مشترك ثنائي الحد

ثم نستخرج العامل المشترك ثنائي الحد لينتج لنا الناتج

التحقيق:

$(x-2)(4x^2+5)$

$=4x^3+5x-8x^2-10$

$=4x^3-8x^2+5x-10$

نرتب الحدود حسب الاس الاعلى لها . اذن الحل صحيح

لان ناتج التحقيق نفس السؤال الاصلي

❷ $21-3x+35x^2-5x^3$

$=(21-3x)+(35x^2-5x^3)$

$=\frac{3(7-x)}{(7-x)}+\frac{5x^2(7-x)}{(7-x)}$

$=(7-x)(3+5x^2)$

التحقيق:

$(7-x)(3+5x^2)$

$=21-3x+35x^2-5x^3$

❸ $2r^2k+3k^2v-4r^2v-6v^2k$

$=(2r^2k-4r^2v)+(3k^2v-6v^2k)$

$=\frac{2r^2(k-2v)}{(k-2v)}+\frac{3kv(k-2v)}{(k-2v)}$

$=(k-2v)(2r^2+3kv)$



ماذا يحدث لو جمع الطالب الحدود هكذا .

$(2r^2k-6v^2k)+(-4r^2v+3k^2v)$

$=2k((r^2-3v^2)+v(-4r^2+3k^2)$

يتوقف الحل لان العامل المشترك ذي الحدين مختلف .لا يمكن اخراج أي منهما. اذن يجب مراعاة تشابه الحدود في تجميعها.

التحقيق:

$=(k-2v)(2r^2+3kv)$

$=2r^2k+3k^2v-4r^2v-6v^2k$



❹ $2y^4-\sqrt{12}y^3+\sqrt{2}y-\sqrt{6}$

نحلل

$=2y^4-2\sqrt{3}y^3+\sqrt{2}y-\sqrt{2}\sqrt{3}$

$=(2y^4-2\sqrt{3}y^3)+(\sqrt{2}y-\sqrt{2}\sqrt{3})$

$=\frac{2y^3(y-\sqrt{3})}{(y-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{2}(y-\sqrt{3})}{(y-\sqrt{3})}$

$=(y-\sqrt{3})(2y^3+\sqrt{2})$

في حالة وجود جذور نحللها قبل كل شيء
نقوم بتجميع الحدود التي لها عوامل مشتركه في قوسين بينهما علامة جمع .
ثم نكمل الحل كما في المثال ❶

التحقيق:

$(y-\sqrt{3})(2y^3+\sqrt{2})$

$=2y^4-2\sqrt{3}y^3+\sqrt{2}y-\sqrt{2}\sqrt{3}$

❺ $\sqrt{2}h^2t+\sqrt{3}t^2v-\sqrt{8}h^2v-\sqrt{12}v^2t$

$=\sqrt{2}h^2t+\sqrt{3}t^2v-2\sqrt{2}h^2v-2\sqrt{3}v^2t$

$=(\sqrt{2}h^2t-2\sqrt{2}h^2v)+(\sqrt{3}t^2v-2\sqrt{3}v^2t)$

$=\frac{\sqrt{2}h^2(t-2v)}{(t-2v)}+\frac{\sqrt{3}tv(t-2v)}{(t-2v)}$

$=(t-2v)(\sqrt{2}h^2+\sqrt{3}tv)$

التحقيق:

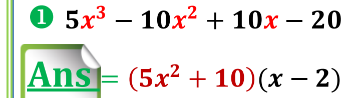
$=(t-2v)(\sqrt{2}h^2+\sqrt{3}tv)$

$=\sqrt{2}h^2t+\sqrt{3}t^2v-2\sqrt{2}h^2v-2\sqrt{3}v^2t$

H.W

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل

❶ $5x^3-10x^2+10x-20$	❷ $49-7z+35z^2-5z^3$	❸ $3r^3k+9k^2s-6r^3s-18s^2k$	❹ $3z^3-\sqrt{18}z^2+z-\sqrt{2}$
Ans $=(5x^2+10)(x-2)$	Ans $=(7-z)(5z^2+7)$	Ans $=(3r^3+9ks)(k-2s)$	Ans $=(z-\sqrt{2})(3z^2+1)$



ملاحظة

في بعض الحالات عند تجميع الحدود المتشابه واستخراج العوامل المشتركة فيها ويبقى عامل مشترك ثنائي الحد .يكون احدى هذه العوامل معكوس عن العامل الاخر. في هذه الحالة نسحب اشارة سالبه من الحد المعكوس لكي يصبح مثل الاخر. . . . .تسمى هذه الحالة (خاصية المعكوس)

مثال

حلل المقادير التالية باستعمال خاصية المعكوس

❶ $14x^3-7x^2+3-6x$

$=(14x^3-7x^2)+(3-6x)$

$=7x^2(2x-1)+3(1-2x)$

نقوم بتجميع الحدود التي لها عوامل مشتركه في قوسين بينهما علامة جمع

ماذا تلاحظ ؟ نلاحظ ان العوامل المشتركة معكوسة. ماذا نفعل؟
نسحب اشارة سالبه من الحد الثاني ليصبح مشابه للحد الاول مع تغير اشارة الحد الوسط من الموجبة الى السالبة.



$=7x^2(2x-1)-3(2x-1)$

$=\frac{7x^2(2x-1)}{(2x-1)}-\frac{3(2x-1)}{(2x-1)}$

$=(2x-1)(7x^2-3)$

وسوف نكمل بقية الامثلة على صيغة الحل هذه

❷ $\sqrt{11}z^3 - \sqrt{44}z^2 + 5(2-z)$

$= \sqrt{11}z^3 - 2\sqrt{11}z^2 + 5(2-z)$

$= \sqrt{11}z^2(z-2) + 5(2-z)$

نسحب اشارة سالبة ونغير اشارة الوسط

$= \frac{\sqrt{11}z^2(z-2)}{(z-2)} - \frac{5(z-2)}{(z-2)}$

$= (z-2)(\sqrt{11}z^2 - 5)$

نحلل الجذور التي لها تحليل

2	44
2	22
11	11
	1

$\sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

. لو تلاحظ ان الحد الثاني جاهز. مسحوب العامل المشترك

❸ $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 5 - 10x$

$= \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3\right) + (5 - 10x)$

$= \frac{1}{4}x^3(2x-1) + 5(1-2x)$

نسحب اشارة سالبة ونغير اشارة الوسط

$= \frac{\frac{1}{4}x^3(2x-1)}{(2x-1)} - \frac{5(2x-1)}{(2x-1)}$

$= (2x-1)(\frac{1}{4}x^3 - 5)$

كيف حصل ذلك؟ عند سحب $\frac{1}{4}$ من $\frac{1}{2}$ يبقى 2 \\ مثل ما متعارف ان سحب العامل المشترك هو قسمه . اذن بشكل واقعي ماذا يتكون لو قسمنا نصف برتقاله الى ارباع. احسنت النصف يولد ربعين يعني الناتج 2. اما بالرياضيات $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2$ بتحويل القسمة الى ضرب مع قلب الحد الثاني

H.W حلل المقادير التالية باستعمال خاصية المعكوس

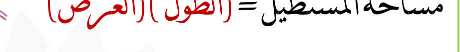
❹ $\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{6}z^2 + 3 - 6z$	❸ $4r^3 - 16r^2 - 3r + 12$	❷ $14v^3 - 28v^2 + 5(2-v)$	❶ $21y^3 - 7y^2 + 3 - 9y$
Ans $= (2z-1)(\frac{1}{6}z^2 - 3)$	Ans $= (r-4)(4r^2-3)$	Ans $= (v-2)(14v^2-5)$	Ans $= (3y-1)(7y^2-3)$

مسائل حياتية

❶ الطاقة الشمسية: الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في انظمة الطاقة الشمسية التي تولد الكهرباء . وتصنع من مواد شبه موصلة مثل السليكون وتمتص الضوء من الشمس . ما أبعاد اللوح الشمسي بدلالة x ؟ اذا كانت مساحته $3x(x-4) - 22(x-4)$ امتار مربعه .



الجواب: المعطيات في السؤال هي المساحة \\ والمطلوب الابعاد يعني الطول والعرض



مساحة المستطيل = (الطول)(العرض) ← سنعوض المساحة لأنها معلومة

$3x(x-4) - 22(x-4)$ = (الطول)(العرض) ← نبسط المساحة باستخدام العامل المشترك ثنائي الحد

$\frac{3x(x-4)}{(x-4)} - \frac{22(x-4)}{(x-4)}$ = (الطول)(العرض) ← نختصر العامل المشترك للإيجاد القوس الثاني

$(x-4)(3x-22)$ = (الطول)(العرض) عندما يكون الطرف الاول حاصل ضرب والطرف الثاني ايضا حاصل فيكون الطرفان متساويان

فيكونا ابعاد اللوح الشمسي هما $(3x-22)$ و $(x-4)$ بالمتر

ملاحظة: لا يهم من هو الطول ومن هو العرض
لان المساحة ناتجة من حاصل ضرب

❷ **طائر الفلامنكو:** هو طائر مهاجر يمتاز بلونه الوردي يقطع مسافات طويلة اثناء الهجرة . في موسم الهجرة يمر هذه الطائر في الاهوار الذي تقع جنوب العراق ليحصل على التغذية من المستنقعات والمسطحات المائية . اذا كانت مساحة المستنقع هي $4y^2 + 14y + 7(2y + 7)$ امتار مربعة .

فما شكل المسطح ؟ وماهي ابعاده بدلالة y ؟



الجواب: المعطيات هي المساحة . والمطلوب إيجاده هو نوع الشكل وابعاده؟

مساحة المسطح = $4y^2 + 14y + 7(2y + 7)$ ← نبسط المساحة باستخدام التجميع

مساحة المسطح = $(4y^2 + 14y) + 7(2y + 7)$

$2y(2y + 7) + 7(2y + 7) =$ ← نستخرج العامل المشترك

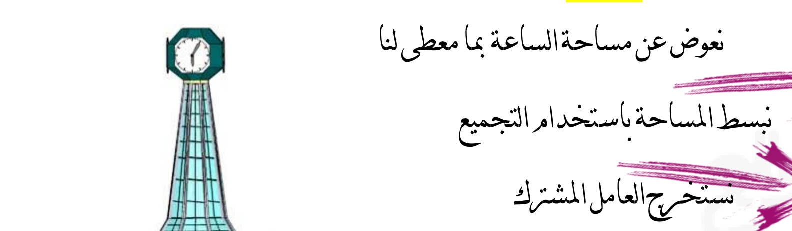
$\frac{2y(2y+7)}{(2y+7)} + \frac{7(2y+7)}{(2y+7)} =$ ← نختصر العامل المشترك

مساحة المسطح = $(2y + 7)(2y + 7)$ **ماذا تلاحظ ؟** نلاحظ ان الابعاد متساوية وتساوي $(2y + 7)$ متر \\ أي شكل طوله يساوي عرضه \\ هو المربع

---

❸ **ساعة بغداد :** ساعة بغداد هي مبنى مرتفع تعلوه ساعة معلقه على برج لها اربعة اوجه ، يقع المبنى ضمن ساحة الاحتفالات في بغداد وانشئت سنة 1994 م . ما نصف قطر الدائرة الداخلية للساعة بدلالة z اذا علمت ان مساحتها $z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9)$ ؟

الجواب: المعطيات هي مساحة الدائرة \\ والمطلوب نصف القطر r \ **للفائدة:** قانون مساحة الدائرة $r^2\pi =$ حيث r نصف القطر. و π النسبة الثابتة



مساحة دائرة الساعة = $r^2\pi$ ← نعوض عن مساحة الساعة بما معطى لنا

$r^2\pi = z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9)$ ← نبسط المساحة باستخدام التجميع

$r^2\pi = (z^2\pi - 3z\pi) - \pi(3z - 9)$ ← نستخرج العامل المشترك

$r^2\pi = z\pi(z - 3) - 3\pi(z - 3)$ ← نختصر العامل المشترك

$r^2\pi = \frac{z\pi(z-3)}{\pi(z-3)} - \frac{3\pi(z-3)}{\pi(z-3)}$

$r^2\pi = \pi(z - 3)(z - 3)$ ← نختصر π من الطرفين ونضع تربيع على احد القوسين ونحذف الثاني لانهما متشابهين وبينهما ضرب . وعند الضرب تجمع الاسس

$r^2 = (z - 3)^2$ ← نجذر الطرفين جذر تربيعي لايجاد قيمة r فقط وليس تربيعها

$\sqrt{r^2} = \sqrt{(z - 3)^2}$ ← $r = (z - 3)$

اذن نصف قطر دائرة الساعة الداخلية لساعة بغداد يساوي $z - 3$

4 **ساحة كهرمانة :** يعد نصب ساحة كهرمانة وسط بغداد من المعالم الحضارية المتميزة في العراق . يتوسط هذه التمثال الساحة التي تقع في الكراده ويبلغ نصف قطر التمثال الدائري r متر . ويحيط به حوض على شكل مدائري . اذا كان نصف قطر التمثال مع الحوض $r + 2$ متر .

جد مساحة الحوض ؟



تذكر: مساحة الدائرة $= r^2\pi$

الجواب : المعطيات هي نصف قطر التمثال r ونصف قطر التمثال مع الحوض $r + 2$ \\ والمطلوب مساحة الحوض

مساحة الحوض = مساحة التمثال مع الحوض − مساحة التمثال

والآن نجد مساحة التمثال مع الحوض ونجد مساحة التمثال \\ ثم نعوضهما بالقانون

مساحة التمثال $= r^2\pi$ — لأنه دائري الشكل و نصف قطره r فيأخذ قانون مساحة الدائرة

مساحة التمثال مع الحوض $= (r+2)^2\pi$ — لأنه دائري الشكل ونصف قطره $r + 2$ فنستخدم قانون مساحة الدائرة

مساحة التمثال مع الحوض $= (r^2 + 4r + 4)\,\pi$ — فتحنا التربيع بواسطة قانون مربع الحدانية وسوف ندخل π على القوس بالتوزيع

مساحة التمثال مع الحوض $= r^2\pi + 4r\pi + 4\,\pi$

اذن مساحة الحوض $= r^2\pi + 4r\pi + 4\,\pi - r^2\pi$ — بالتعويض في القانون اعلاه . ثم نحذف الحدود المتشابهة والمختلفة في الاشارة

مساحة الحوض $= 4r\pi + 4\,\pi$ — سحب عامل مشترك — مساحة الحوض $= 4\pi(r + 1)$ متر مربع

فكر

أولاً تحدٍ: حلل المقدار الاتي الى ابسط صورة

$$5x^5y + 7y^3z - 10x^5z - 14z^2y^2$$

H.W

Ans: $(y - 2z)(5x^5 + 7y^2z)$



ثانياً اصحح الخطأ كتبت ابتسام ناتج تحليل المقدار كما يلي

$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}t^3 + t^2 - \sqrt{12}t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}t^2 - t)$ اكتب خطأ ابتسام وصححه؟

في البداية نحلل المقدار ومن ثم نحدد الاخطاء .

2 خارج	2	24
	2	12
داخل	2	6
	3	3
		1

$\sqrt{24} = 2\sqrt{2}\sqrt{3}$

$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}t^3 + t^2 - \sqrt{12}t$

$= \sqrt{2}t^4 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}\,t^3 + t^2 - 2\sqrt{3}\,t$

$= (\sqrt{2}t^4 - 2\sqrt{2}\sqrt{3}\,t^3) + (t^2 - 2\sqrt{3}\,t)$

$= \sqrt{2}t^3(t - 2\sqrt{3}) + t(t - 2\sqrt{3})$

$= (t - 2\sqrt{3})(\sqrt{2}t^3 + t)$

خطأ ابتسام في كتابة اس ال t في القوس الثاني تربيع والصحيح هو تكعيب . وفي تبديل اشارات الاقواس

ثالثاً حس عددي ما العدد المجهول من المقدار التالي

$x^2 + 3x + 5x + 15 = (x + 3)(x + \square)$

العدد المفقود هو 5 لان ناتج الحد الاخير هو 15 وهو الحد الاخير دائما هو حاصل ضرب بعيد مع بعيد في عملية التوزيع . فيكون تحليل الـ $5 \times 3 = 15$

$(x + 3)(x + 5) = x^2 + 3x + 5x + 15$





رابعاً اكتب الفرق بين المقدارين $(x + y)(x - y)$ و $(x + y)(x + y)$

SOL

$= (x + y)(x - y) - (x + y)(x + y)$

$= \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)} - \frac{(x+y)(x+y)}{(x+y)}$

$= (x + y)((x - y) - (x + y))$

$= (x + y)(x - y - x - y)$

$= (x + y)(-2y) = -2y(x + y)$

الفرق معناه هو الطرح

نستخرج العامل المشترك

نفتح الاقواس بإدخال الإشارة السالبة على القوس الثاني ومن ثم نحذف الحدود المتشابهة والمختلفة بالإشارة ونجمع الحدود المتشابه



دع مخاوفك لنفسك . . . . . وشارك شجاعتك مع الاخرين

Multiple Choice — الاختيارُ من متعدد

الدرس [2-2] تحليل المقدار الجبري بالعامل المشترك الأكبر
Using Greater Common Factor to factor Algebraic Expression

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF):

1. $12x^3 + 9x^2 - 3x$
   a) $3x(4x^2 + 3x + 1)$ b) $3x(4x^2 + 3x - 1)$ ✓
   c) $9x(3x^2 + x + 1)$ d) $9x(3x^2 + x - 1)$

2. $6y^2(3y - 4) + 36y$
   a) $6y(3y^2 + 4y + 6)$ b) $6y(3y^2 + 4y - 6)$
   c) $6y(3y^2 - 4y - 6)$ d) $6y(3y^2 - 4y + 6)$ ✓

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

3. $3z(z - 3) - 7(z - 3)$
   a) $(z + 3)(3z - 7)$ b) $(z - 3)(3z + 7)$
   c) $(z - 3)(3z - 7)$ ✓ d) $(z + 3)(3z + 7)$

4. $\frac{1}{4}(x + 9) - \frac{1}{2}x^2(x + 9)$
   a) $(x + 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$ ✓ b) $(x - 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$
   c) $(x + 9)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2)$ d) $(x + 9)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)$

5. $\sqrt{2}\,v(x - 1) - \sqrt{3}\,t(x - 1)$
   a) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$ b) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$ ✓
   c) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$ d) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

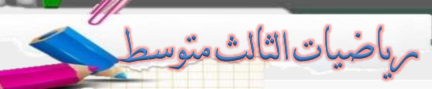
6. $3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$
   a) $(y + 3)(3y^2 + 5)$ b) $(y + 3)(3y^2 - 5)$
   c) $(y - 3)(3y^2 + 5)$ ✓ d) $(y - 3)(3y^2 - 5)$

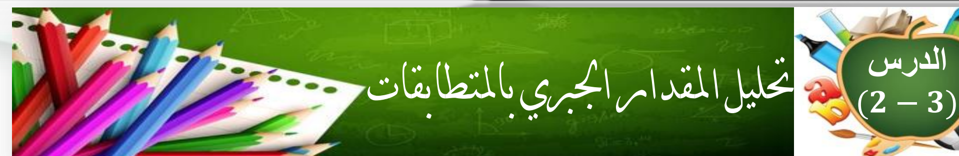
حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

7. $20y^3 - 4y^2 + 3 - 15y$
   a) $(5y + 1)(\frac{1}{3}{}^2 - 3)$ b) $(5y - 1)(4y^2 + 3)$
   c) $(5y - 1)(4y^2 - 3)$ ✓ d) $(5y + 1)(4y^2 + 3)$

8. $\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 4 - 2x$
   a) $(x - 2)(\frac{1}{6}x^3 - 2)$ ✓ b) $(x + 2)(\frac{1}{6}x^3 - 2)$
   c) $(x + 2)(\frac{1}{6}x^3 - 2)$ d) $(x - 2)(\frac{1}{6}x^3 + 2)$









الدرس (2 – 3) تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات



اولاً: التحليل بالفرق بين مربعين

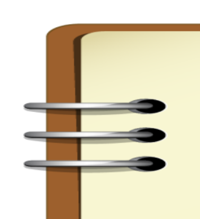
هي حدودية ثنائية متكونه من حدين تربيعين تفصلهما اشارة سالبة $x^2 - y^2$

تعلمنا في الدرس الاول من هذه الفصل . في حالة ضرب قوسين متشابهين في كل شيء عدى اشارة الحد الوسط فأن الناتج هو فرق بين مربعين . واليوم سوف نحلل الفرق بين مربعين الى قوسين . أي العمليه العكسية للضرب .

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

القوس الاول: الجذر التربيعي للحد الاول + الجذر التربيعي للحد الثاني $\left(\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}\right) = (x + y)$

القوس الثاني: الجذر التربيعي للحد الاول − الجذر التربيعي للحد الثاني $\left(\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}\right) = (x - y)$



ملاحظات ماهي مميزات الفرق بين مربعين

1. تكون حدودية ثنائية أي متكونة من حدين فقط
2. تفصل الحدين اشارة سالبة فقط . لو كان المقدار بالصيغة التالية $x^2 + y^2$ لا يمكن تحليلة في هذه المرحله الدراسية
3. يكون تحليله عباره عن قوسين صغيرين متشابهين عدى اشارة الحد الوسط مختلفة

مثال حلل كل مقدار من المقادير التالية بالفرق بين مربعين



ملاحظة: قبل كل عملية تحليل تسأل نفسك ؟ هل يوجد عامل مشترك . اذا كان (نعم) يوجد . استخرجه ثم حلل واذا كان (لا) يوجد . فحلل مباشرة

❶ $x^2 - 9$ لا يوجد عامل مشترك . نحلل مباشرةً

$= \left(\sqrt{x^2} + \sqrt{9}\right)\left(\sqrt{x^2} - \sqrt{9}\right) = (x + 3)(x - 3)$

نفتح قوسين صغيرين مختلفين في اشارة الحد الوسط ونضع فيهما . الجذر التربيعي للحد الاول والجذر التربيعي للحد الثاني

❷ $49 - v^2$ لا يوجد عامل مشترك . نحلل مباشرةً

$= \left(\sqrt{49} + \sqrt{v^2}\right)\left(\sqrt{49} - \sqrt{v^2}\right) = (7 + v)(7 - v)$

❸ $36y^2 - z^2$ لا يوجد عامل مشترك . نحلل مباشرةً

$= \left(\sqrt{36y^2} + \sqrt{z^2}\right)\left(\sqrt{36y^2} - \sqrt{z^2}\right) = (6y + z)(6y - z)$

❹ $2x^2 - z^2$

$= \left(\sqrt{2x^2} + \sqrt{z^2}\right)\left(\sqrt{2x^2} - \sqrt{z^2}\right) = (\sqrt{2}x + z)(\sqrt{2}x - z)$

لو تلاحظ ان الـ 2 لم تخرج من تحت الجذر ؟ لانها عدد اولي ليس لها جذر تربيعي مباشر

❺ $5h^2 - 7v^2$

$= (\sqrt{5}h + \sqrt{7}v)(\sqrt{5}h - \sqrt{7}v)$

❻ $y^2 - 121$

$= (y + 11)(y - 11)$



❼ $64m^2 - 9n^2$
$= (8m + 3n)(8m - 3n)$

❽ $12 - t^2$
$= (\sqrt{12} + t)(\sqrt{12} - t)$ او $(2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$

في هذه الحالة اما نحلل ال 12 الى $2\sqrt{3}$ او نبقيها نفسها ولكن انتبه؟ 12 عدد اولي ليس له جذر مباشر

❾ $18 - t^2$
$= (\sqrt{18} + t)(\sqrt{18} - t)$ او $(3\sqrt{2} + t)(3\sqrt{2} - t)$

❿ $t^4 - v^6$
$= (t^2)^2 - (v^3)^2$
$= (t^2 + v^3)(t^2 - v^3)$

في هذه الحاله يجب تجزءة الاس الاعلى على شكل اس تربيعي لانها فرق بين مربعين . من خلال خاصية (عند الرفع تضرب الاسس)

ملاحظة: في تحليل الفرق بين مربعين . يكون تحليل المتغير الذي اسه زوجي واكبر من 2 . هو تقسيم الاس الزوجي على القوسين بالتساوي.

واذا كان الاس فردي ولم يكن هناك عامل مشترك فلا يمكن تحليله بالفرق بين مربعين مثل $t^6 - v^7$, $t^2 - v^5$ لا يمكن تحليلهما بالفرق بين مربعين.

لانه // لايمكن تجزءة اسس الحدود على شكل اس تربيعي



مثال حلل كل مقدار من المقادير التالية

❶ $8x^3y - 2xy^3$
$= 2xy(4x^2 - y^2)$
$= 2xy(2x + y)(2x - y)$

يوجد عامل مشترك نستخرجه خارج القوس ثم نحلل القوس فرق بين مربعين

❷ $27x^3z - 3xz^3$
$= 3xz(9x^2 - z^2)$
$= 3xz(3x + z)(3x - z)$

❸ $12 - 3t^2$
$= 3(4 - t^2)$
$= 3(2 + t)(2 - t)$

يوجد عامل مشترك رقم فقط نستخرجه خارج القوس ثم نحلل القوس فرق بين مربعين

❹ $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16}$
$= \frac{1}{16}(64y^2 - 1)$
$= \frac{1}{16}(8y + 1)(8y - 1)$

او بطريقة 2

❹ $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16}$
$= \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

بدون سحب عامل مشترك

❺ $\frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z$
$= \frac{1}{2}z(z^2 - 1)$
$= \frac{1}{2}z(z + 1)(z - 1)$

❻ $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8}$
$= \frac{1}{8}(2y^2 - 1)$
$= \frac{1}{8}(\sqrt{2}y + 1)(\sqrt{2}y - 1)$

$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{4} \times \frac{8}{1} = 2$
عند تحويل القسمة الى ضرب نقلب الحد الثاني

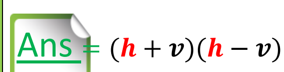
❼ $\frac{1}{16}z^4 - \frac{1}{81}$
$= (\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9})(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{9})$
$= (\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9})(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3})(\frac{1}{2}z - \frac{1}{3})$

نلاحظ ان القوس الثاني ايضا على شكل فرق بين مربعين .. نحلله مره اخرى

❽ $\frac{1}{3}z^5 - \frac{1}{12}z$
$= \frac{1}{12}z(4z^4 - 1)$
$= \frac{1}{12}z(2z^2 + 1)(2z^2 - 1)$
$= \frac{1}{12}z(2z^2 + 1)(\sqrt{2}z + 1)(\sqrt{2}z - 1)$







H.W حلل كل مقدار من المقادير التالية

❶ $h^2 - v^2$ Ans $= (h + v)(h - v)$	❷ $36 - 4x^2$ Ans $= (6 + 2x)(6 - 2x)$	❸ $9m^2 - 4n^2$ Ans $= (3m + 2n)(3m - 2n)$	❹ $18 - t^2$ Ans $= (3\sqrt{2} + t)(3\sqrt{2} - t)$
❺ $8y^3x - 2x^3y$ Ans $= 2yx(2y + x)(2y - x)$	❻ $\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{27}$ Ans $= \frac{1}{3}(z + \frac{1}{3})(z - \frac{1}{3})$		



ثانياً التحليل بالمربع الكامل

هي حدودية ثلاثية . أي مكونة من ثلاثة حدود وتكون بالصورة التالية $ax^2 \mp bx + c$

تعلمنا في الدرس الاول من هذه الفصل كيف نضرب المربع الكامل بالقانون والان سوف نحلل ناتج الضرب له أي العملية العكسيه .

$$x^2 \mp 2xy + y^2 \Rightarrow = \Leftarrow (x \mp y)^2$$

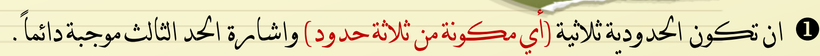


ملاحظات

مميزات المربع الكامل $ax^2 \mp bx + c$ وكيف نحللها

❶ ان تكون الحدودية ثلاثية (أي مكونة من ثلاثة حدود) واشارة الحد الثالث موجبة دائماً .

❷ يجب ان تحقق القانون التالي واذا لم تحقق فهي لاتمثل مربع كامل . الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$



❸ اذا كانت تحقق القانون فيكون تحليلها (نفتح قوس صغير ونضع علية تربيع . ونضع فيه الجذر التربيعي للحد الاول و اشارة الحد الوسط من الحدودية و الجذر التربيعي للحد الثالث)

$$x^2 \mp 2xy + y^2 = \left(\sqrt{x^2} \mp \sqrt{y^2}\right)^2 = (x \mp y)^2$$

مثـــال حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله

اسأل نفسك: ❶ هل تتكون من ثلاث حدود وحدها الثالث موجب \\ نعم

❷ هل تحقق القانون الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$ \\ نعم

❸ نحللها لأنها حققت القانون . فهي مربع كامل

❶ $x^2 + 10x + 25$

$+2(\sqrt{x^2})(\sqrt{25}) = +2(x)(5) = +10x =$ الحد الوسط



$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$ اذن مربع كامل وتحليلها

❷ $x^2 + 6x + 9$

$+2(\sqrt{x^2})(\sqrt{9}) = +2(x)(3) = +6x =$ الحد الوسط

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ اذن مربع كامل وتحليلها

تذكر: اشارة القوس الصغير هي نفس اشارة الحد الوسط في المقدار

❸ $4-37v+9v^2$

$-2(\sqrt{4})\left(\sqrt{9v^2}\right)=-2(2)(3v)=-12v\neq-37v$ الحد الوسط

اذن لا تمثل مربع كامل \\ لأنها لا تحقق القانون ولا يساوي الحد الوسط \\ اذن لا يمكن تحليلها

❹ $16z^2-8z+1$

$-2\left(\sqrt{16z^2}\right)(\sqrt{1})=-2(4z)(1)=-8z=-8z$ الحد الوسط

$16z^2-8z+1=(4z-1)^2$ اذن مربع كامل وتحليلها

❺ $9h^2-6h+3$

تذكير: الـ 3 عدد اولي ليس لها جذر

$-2\left(\sqrt{9h^2}\right)(\sqrt{3})=-2(3h)(\sqrt{3})=-6\sqrt{3}h\neq-6h$ الحد الوسط

اذن لا تمثل مربع كامل \\ لأنها لا تحقق القانون ولا يساوي الحد الوسط \\ اذن لا يمكن تحليلها

❻ $3-4\sqrt{3}t+4t^2$

$-2(\sqrt{3})(\sqrt{4t^2})=-2(\sqrt{3})(2t)=-4\sqrt{3}t=$ الحد الوسط

$3-4\sqrt{3}t+4t^2=(\sqrt{3}-2t)^2$ اذن مربع كامل وتحليلها

❼ $25x^2+30x+9$

$+2(\sqrt{25x^2})(\sqrt{9})=+2(5x)(3)=30x=$ الحد الوسط

$25x^2+30x+9=(5x+3)^2$ اذن مربع كامل وتحليلها

❽ $4v^2+4v+4$

$+2\left(\sqrt{4v^2}\right)(\sqrt{4})=+2(2v)(2)=+8v\neq+4v$ الحد الوسط

اذن لا تمثل مربع كامل \\ لأنها لا تحقق القانون ولا يساوي الحد الوسط \\ اذن لا يمكن تحليلها

❾ $64h^2-48h-9$

لا تمثل مربع كامل لان الحد الاخير اشارةُ سالبة. وهذه لا يجوز في المربع الكامل

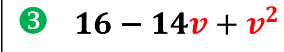
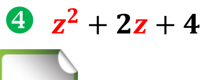
❿ $4v^2+4\sqrt{5}v+5$

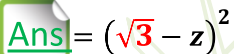
$+2\left(\sqrt{4v^2}\right)(\sqrt{5})=+2(2v)(\sqrt{5})=+4\sqrt{5}v=$ الحد الوسط

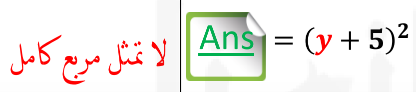
$4v^2+4\sqrt{5}v+5=(2v+\sqrt{5})^2$

H.W

حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله

❶ $x^2+18x+81$	❷ $y^2+12y+25$	❸ $16-14v+v^2$	❹ z^2+2z+4
Ans $=(x+9)^2$	 Ans لا تمثل مربع كامل	 Ans لا تمثل مربع كامل	Ans لا تمثل مربع كامل
❺ $3-2\sqrt{3}z+z^2$	❻ $2h^2-12h-18$	❼ $y^2+10y+25$	
 Ans $=(\sqrt{3}-z)^2$	Ans لا تمثل مربع كامل	Ans $=(y+5)^2$	





ثالثاً الحد المفقود من المقدار الجبري $ax^2 \mp bx + c$:هو حد مفقود في حدودية المربع الكامل .ولإيجاد هذه الحد نطبق القانون.

الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$



مثال اكتب الحد المفقود من المقدار $ax^2 \mp bx + c$ ليصبح مربع كامل وحلله

❶ $25x^2 - \ldots\ldots + 49$

نكتب القانون اولاً

الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

ثم نعوض بالقانون ما هو معلوم للإيجاد الحد المفقود \\ وهنا الحد المفقود هو الحد الوسط

الحد الوسط $= -2\left(\sqrt{25x^2}\right)\left(\sqrt{49}\right)$

الحد الوسط $= -2(5x)(7)$

الحد الوسط $= -70x$

$25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$

فتكون الحدودية بالصورة الكاملة . ثم نحللها

❷ $3 - \ldots\ldots + 9x^2$

الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

الحد الوسط $= -2\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{9x^2}\right)$

الحد الوسط $= -2\left(\sqrt{3}\right)(3x)$

الحد الوسط $= -6\sqrt{3}\,x$

$3 - 6\sqrt{3}\,x + 9x^2 = \left(\sqrt{3} - 3x\right)^2$

❸ $\ldots\ldots + 8x + 16$ هنا الحد الاول مفقود

الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$8x = 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{16}\right)$

$8x = 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)(4)$

$8x = 8\sqrt{\text{الحد الاول}}$

في هذه الحالة: لإيجاد المجهول تضعه قبل المساواة ونفتح كسر بعد المساواة نضع في البسط (الحد الذي كان سابقا قبل المساواة وفي) المقام (الحد الذي يجنب المجهول سابقا)

$\sqrt{\text{الحد الاول}} = \frac{8x}{8}$

$\sqrt{\text{الحد الاول}} = x$

لأيجاد (الحد الاول) بدون جذر يجب تربيع الطرفين

الحد الاول $= x^2$

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

❹ $\ldots\ldots + 14y + 49$ هنا الحد الاول مفقود

الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$14y = 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{49}\right)$

$14y = 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)(7)$

$14y = 14\sqrt{\text{الحد الاول}}$

$\sqrt{\text{الحد الاول}} = \frac{14y}{14}$

$\sqrt{\text{الحد الاول}} = y$ تربيع الطرفين

الحد الاول $= y^2$

$y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$

❺ $25 - 20x + \ldots\ldots$ هنا الحد الثالث مفقود

الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$20x = -2\left(\sqrt{25}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$20x = -10\sqrt{\text{الحد الثالث}}$

$\sqrt{\text{الحد الثالث}} = \frac{20x}{-10}$

$\sqrt{\text{الحد الثالث}} = -2x$ تربيع الطرفين

الحد الثالث $= +4x^2$

$25 - 20x + 4x^2 = (5 - 2x)^2$





❻ $9h^2 + 6\sqrt{2}\,h + \cdots\cdots$

الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$6\sqrt{2}\,h = 2\left(\sqrt{9h^2}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$6\sqrt{2}\,h = 2(3h)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$6\sqrt{2}\,h = 6h\sqrt{\text{الحد الثالث}}$

$\sqrt{\text{الحد الثالث}} = \frac{6\sqrt{2}\,h}{6h}$

$\sqrt{\text{الحد الثالث}} = \sqrt{2}$ تربيع الطرفين

الحد الثالث $= 2$

$9h^2 + 6\sqrt{2}\,h + 2 = (3h + \sqrt{2})^2$

❼ $4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \cdots\cdots$

الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$2\sqrt{5}\,x = 2\left(\sqrt{4x^2}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$2\sqrt{5}\,x = 2(2x)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$

$2\sqrt{5}\,x = 4x\sqrt{\text{الحد الثالث}}$

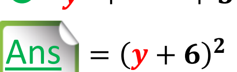
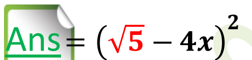
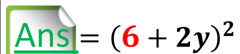
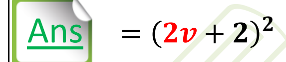
$\sqrt{\text{الحد الثالث}} = \frac{2\sqrt{5}\,x}{2\cdot 4x}$

$\sqrt{\text{الحد الثالث}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ تربيع الطرفين

الحد الثالث $= \frac{5}{4}$

$4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \frac{5}{4} = \left(2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

H.W اكتب الحد المفقود من المقدار $ax^2 \mp bx + c$ ليصبح مربع كامل وحلله

❶ $y^2 + \cdots\cdots + 36$	❷ $5 - \cdots\cdots + 16x^2$	❸ $\cdots\cdots - 20x + 4x^2$	❹ $25v^2 + 10\sqrt{3}v + \cdots\cdots$
 Ans $= (y+6)^2$	 Ans $= (\sqrt{5} - 4x)^2$	Ans $= (5-2x)^2$	Ans $= (5v + \sqrt{3})^2$
❺ $36 + 24y + \cdots\cdots$	❻ $4v^2 + 8v + \cdots\cdots$		
 Ans $= (6+2y)^2$	 Ans $= (2v+2)^2$		

مسائل حياتية

❶ **ملعب الشعب**: يعد ملعب الشعب الدولي في العاصمة بغداد من الملاعب المهمة في العراق اذ انشئ عام 1966 م . اذا كانت مساحة الساحة المخصصة لكرة القدم التي تتوسط ارضيته يمثلها المقدار $x^2 - 400$ متر مربع . فما ابعاد الملعب ؟



الجواب: مساحة الملعب = (الطول)(العرض)

نعوض عن المساحة من المعطى في السؤال

$(\text{الطول})(\text{العرض}) = x^2 - 400$

نحلل المساحة بالفرق بين مربعين

$(\text{الطول})(\text{العرض}) = (x + 20)(x - 20)$

من خلال تساوي الطرفين فتكون ابعاد الملعب بالأمتار . . . . الطول $= (x + 20)$، العرض $= (x - 20)$

❷ **مزرعة الأبقار:** لدى سعد مزرعة ابقار مربعة الشكل طول ضلعها x متر . وسعها لتصبح مستطيلة الشكل فأصبحت مساحة المزرعة $x^2 - 81$ متر مربع . ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعه بدلالة x ؟



الجواب: مساحة المزرعة = (الطول)(العرض) — نعوض عن المساحة من المعطى في السؤال

$x^2 - 81 =$ (العرض)(الطول) — نحلل المساحة بالفرق بين مربعين

$(x+9)(x-9) =$ (العرض)(الطول)

من خلال تساوي الطرفين فتكون ابعاد المزرعه بالأمتار.... الطول $= (x+9)$ ، $(x-9) =$ العرض

❸ **المئذنة الملوية:** تقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية وتعد احدى المعالم العراقية القديمة المشهورة والتي تعود الى الحكم العباسي . وترتكز على قاعدة مربعه مساحتها $x^2 - 8x + 16$ متر مربع . ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟

الجواب: مساحة الملوية = (طول الضلع)(طول الضلع) $=$ (طول الضلع)^2 لانها مربعة الشكل \\ نعوض عن المساحة من المعطى في السؤال



(طول الضلع)^2 $= x^2 - 8x + 16$ — نحلل المساحة بالمربع الكامل . لأنها تحقق قانونه

(طول الضلع)^2 $= (x-4)^2$ — نجذر الطرفين لايجاد طول الضلع وحده بدون تربيع

طول الضلع $= x - 4$

❹ **لوحة فنية:** رسم بشار لوحة فنية تمثل منطقة الاهوار في جنوب العراق فكان المقدار $4x^2 - 8x + 9$ سنتمترات مربعه يمثل مساحة اللوحة .

أيمثل مقدار مساحة اللوحة الفنية مربعاً كاملاً ام لا ؟





لمعرفة هل المقدار يمثل مربع كامل ام لا نطبق القانون التالي

الحد الوسط $= \mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)$ — نأخذ الطرف الثاني ونثبته . أي يحقق الطرف الاول ام لا

$-2\left(\sqrt{4x^2}\right)(\sqrt{9}) = -2(2x)(3) = -12x \neq -8x$ الحد الوسط

لا يمثل مربع كامل لأنه لا يساوي الحد الوسط ولا يحقق الطرف الاول



لاتدع خريف العقول .... يداهمك

فكر

أولاً تحدِ: هل المقدار التالي يمثل مربعاً كاملاً ام لا ؟ معللاً اجابتك

$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$

SOL:

نطبق القانون التالي
$\mp 2\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}}\right)\left(\sqrt{\text{الحد الاول}}\right) = \text{الحد الوسط}$

الحد الوسط $= -2\left(\sqrt{\frac{1}{9}x^2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{16}}\right) = -2\left(\frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{6}x =$

اذن يمثل مربع كامل وتحليله

$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2$



ثانياً أصحح الخطأ: قالت منتهى ان المقدار $(2x+1)(2x-1)$ هو تحليل للمربع الكامل $4x^2 - 4x + 1$ حدد خطأ منتهى وصححه؟

SOL:

نحلل المقدار ومن ثم نحدد الاخطاء \\ نحلل مباشرة من دون التحقق من كونه مربع كامل ام لا . . لان . في السؤال مذكور انه مربع كامل

$4x^2 - 4x + 1$

$= (2x-1)^2 = (2x-1)(2x-1)$



خطأ منتهى هو في اشارة القوس الاول حيث كتبت بدل السالب موجب



ثالثاً حس عددي: أيمثل المقدار $9x^2 + 12x - 4$ مربعاً كاملاً ام لا؟ وضح اجابتك

لا يمثل مربع كامل لان اشارة الحد الثالث سالبة ومن شروط المربع الكامل ان تكون اشارة الحد الثالث موجبة



رابعاً اكتب: تحليل للمقدار التالي $4x^2 + 8x + 4$

SOL:

المقدار يمثل مربع كامل
فيكون تحليله

$4x^2 + 8x + 4$

$= (2x+2)^2$



او بطريق ثانية . نسحب عامل مشترك ثم نحلله بالمربع الكامل $4x^2 + 8x + 4 = 4(x^2 + 2x + 1) = 4(x+1)^2$

Multiple Choice **الاختيارُ من متعدد**

الدرس [2-3 تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

Using Special Identities to factor Algebraic Expression

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار جبري من المقادير الجبرية الآتية:

1. $9-4x^2$ a) $(3+2x)(3+2x)$ b) $(3+2x)(3-2x)$ ✓ c) $(9-x)(9+4x)$ d) $(3+x)(3-4x)$
2. $12y^3z-3yz^3$ a) $3y(2y-z)(y+2z)$ b) $3z(2y-z)(2y+z)$ c) $3yz(2y-z)(2y+z)$ ✓ d) $3yz(y-2z)(y+2z)$
3. $\frac{1}{6}x^3 - x\frac{1}{24}$ a) $\frac{x}{6}(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$ ✓ b) $\frac{x}{6}(x+\frac{1}{4})(x-\frac{1}{4})$ c) $\frac{x}{3}(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2})$ d) $\frac{x}{6}(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4})(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4})$
4. $4x^2+24x+36$ a) $(x+6)^2$ b) $(x-6)^2$ c) $4(x-3)^2$ d) $4(x+3)^2$ ✓
5. $16-8y+y^2$ a) $(4+2y)^2$ b) $(4-2y)^2$ c) $(4-y)^2$ ✓ d) $(4+y)^2$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً:

6. $4x^2-20x+25$ a) $2(x)(5)=10x$ مربع كامل لأن b) $-2(2x)(5)=-20x$ مربع كامل لأن ✓ c) $-4(x)(5)\neq 10x$ مربع كامل لأن d) $-4(x)(5)\neq 20x$ ليس مربعاً كاملاً لأن
7. $64-48y+9y^2$ a) $2(4)(3y)\neq -48y$ ليس مربعاً كاملاً لأن b) $2(8)(4y)=48y$ مربع كامل لأن c) $-2(8)(3y)=-48y$ مربع كامل لأن ✓ d) $-4(4)(3y)\neq 48y$ ليس مربعاً كاملاً لأن

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري ax^2+bx+c ليصبح مربعاً كاملاً:

8. $z^2+\ldots+49$ a) $14z$ ✓ b) $-10z$ c) $7z$ d) $-7z$
9. $36-24x+\ldots$ a) $2x^2$ b) $-2x^2$ c) $4x^2$ ✓ d) $-4x^2$
10. $16y^2+40y+\ldots$ a) 9 b) 25 ✓ c) -9 d) -25



الدرس (2 – 4)

تحليل المقدار من ثلاث حدود بالتجربة

تعلمنا في الدرس الثالث تحليل المقدار الجبري بالمربع الكامل والذي يجب ان تنطبق علية بعض الشروط ومن ضمنها قانون الحد الوسط لكي يصبح المقدار مربع كامل . اما المقادير الذي لاتمثل مربع كامل ولايمكن تحليلها به . سوف نحللها **بالتجربه في هذه الدرس** .

وتقسم التجربه الى قسمين



اولاً تحليل المقدار من نوع $x^2 \pm bx \pm c$ بالتجربه

ملاحظات

مميزات تحليل المقدار من نوع $x^2 \pm bx \pm c$ بالتجربه

1. يتكون المقدار من ثلاث حدود . ويكون معامل x^2 واحد .
2. نحلل المقدار باستخدام القانون التالي . $x^2 \pm bx \pm c = (x \pm n)(x \pm m)$ حيث $n + m = b$, $n \times m = c$ يعني (حاصل ضرب بعيد × بعيد يساوي الحد الثالث) و(حاصل جمع بعيد + قريب يساوي الحد الثاني)

مثال حلل كل مقدار من المقادير التالية

① نفتح قوسين صغيرين و نوزع عليها الحد التربيعي $(y \quad)(y \quad)$

② نضع في القوس الاول حاصل ضرب اشارة الحد الاول × اشارة الحد الثاني $+ = + \times +$

نضع في القوس الثاني حاصل ضرب اشارة الحد الثاني × اشارة الحد الثالث $- = - \times +$

③ نحلل الحد الثالث الى عددين . ونضع العدد الاكبر في القوس الذي يحمل نفس اشارة الحد الوسطي

عوامل 12	طرح
(12)(1)	11
(6)(2)	4
(4)(3)	1

تكون **طرح** لان اشارات الاقواس مختلفة

اخترنا هذه التحليل لان ناتج الطرح يساوي معامل الحد الثاني

نضعه في القوس الاول ، نضعه في القوس الثاني



❶ $y^2 + y - 12$

$= (y + 4)(y - 3)$

ناتج ضرب قريب مع قريب $+4y$

ناتج ضرب بعيد مع بعيد $-3y$

يساوي الحد الثاني $+1y$

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

② $z^2 - z - 6$

$= (z-3)(z+2)$

$-3z$ ، $+2z$ ← $-1z$ يساوي الحد الثاني

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

عوامل 6	طرح
(6)(1)	5
(3)(2)	1

③ $x^2 - 9x + 18$

لان اشارات القوسين متشابهه

$= (x-6)(x-3)$

$-6x$ ، $-3x$ ← $-9x$ يساوي الحد الثاني

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

عوامل 18	جمع
(18)(1)	19
(9)(2)	11
(6)(3)	9

④ $x^2 - 13x + 12$

$= (x-12)(x-1)$

$-12x$ ، $-1x$ ← $-13x$ يساوي الحد الثاني

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

عوامل 12	جمع
(12)(1)	13
(6)(2)	8
(4)(3)	7

⑤ $y^2 + 6y - 27$

$= (y+9)(y-3)$

$+9y$ ، $-3y$ ← $+9y$ يساوي الحد الثاني

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

عوامل 27	طرح
(27)(1)	26
(9)(3)	6

⑥ $x^2 - xy - 20y^2$

$= (x-5y)(x+4y)$

$-5xy$ ، $+4xy$ ← $-1xy$ يساوي الحد الثاني

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

عوامل 20	طرح
(20)(1)	19
(10)(2)	8
(5)(4)	1

⑦ $3 + 2z - z^2$

$= (1+z)(3-z)$

$+3z$ ، $-1z$ ← $+2z$ يساوي الحد الثاني

عندما يكون الحد التربيعي في الاخير نوزعه على القوسين ونجعله في الاخير

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

عوامل 3	طرح
(3)(1)	2

⑧ $1 - 2z + z^2$

$= (1-z)(1-z)$

$-1z$ ، $-1z$ ← $-2z$ يساوي الحد الثاني

$= (1-z)^2$

هل تلاحظ ان المقدار مربع كامل

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

عوامل 1	جمع
(1)(1)	2

⑨ $15 - 8z + z^2$

$= (3-z)(5-z)$

$-5z$ ، $-3z$ ← $-8z$ يساوي الحد الثاني

عندما يكون الحد التربيعي في الاخير نضع الرقم الكبير في القوس الثاني

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

عوامل 15	جمع
(15)(1)	16
(5)(3)	8

⑩ $24 - 2z - z^2$

$= (4-z)(6+z)$

$-6z$ ، $+4z$ ← $-2z$ يساوي الحد الثاني

ناتج الحل صحيح من خلال التحقيق

عوامل 24	طرح
(24)(1)	23
(12)(2)	10
(6)(4)	2

نشط عقلك

= 30

= 18

= 2

= ??

ملاحظة : في حالة وجود جذور في الحد الثاني نقوم بتحليل الحد الثالث بالجذور .

نحلله حسب العدد الذي يوجد داخل جذر الحد الثاني

❶ $x^2 - 5\sqrt{3}\,x + 18$

$= (x - 3\sqrt{3})(x - 2\sqrt{3})$

$-3\sqrt{3}x$

$-2\sqrt{3}x$

$-5\sqrt{3}x$ يساوي الحد الثاني

$18 = (6)(3) = \begin{cases} (6\times 1)(\sqrt{3})(\sqrt{3}) \\ (3\times 2)(\sqrt{3})(\sqrt{3}) \end{cases}$

$\begin{cases} 6\sqrt{3} + \sqrt{3} = 7\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} \end{cases}$

لماذا العملية جمع وليس طرح ؟ \ لان اشارات الاقواس متشابهة

❷ $12 - 5\sqrt{2}\,v + v^2$

$= (2\sqrt{2} - v)(3\sqrt{2} - v)$

$-3\sqrt{2}v$

$-2\sqrt{2}v$

$-5\sqrt{2}\,v$ يساوي الحد الثاني

$12 = (6)(2) = \begin{cases} (6\times 1)(\sqrt{2})(\sqrt{2}) \\ (3\times 2)(\sqrt{2})(\sqrt{2}) \end{cases}$

$\begin{cases} 6\sqrt{2} + \sqrt{2} = 7\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{cases}$

لماذا العملية جمع وليس طرح ؟ \ لان اشارات الاقواس متشابهة

H.W حلل كل مقدار من المقادير التالية

❹ $x^2 - x - 72$	❸ $15 - 8z + z^2$	❷ $y^2 - 7y + 12$	❶ $x^2 + 6x + 8$
Ans $= (x-9)(x+8)$	Ans $= (3-z)(5-z)$	Ans $= (y-4)(y-3)$	Ans $= (x+4)(x+2)$
❽ $x^2 + 9x + 14$	❼ $y^2 - 12y + 11$	❻ $3 + 2z - z^2$	❺ $36 - 15z + z^2$
Ans $= (x+7)(x+2)$	Ans $= (y-11)(y-1)$	Ans $= (1+z)(3-z)$	Ans $= (3-z)(12-z)$

الامس عبرة . . . . . . واليوم خبرة . . . . وغداً تصحيح الاخطاء

وهذه حال الدنيا . . . . . . نعيش وتتعلم

ثانياً تحليل المقدار من نوع $ax^2 \pm bx \pm c$ بالتجربه . حيث $a \neq 0$

هذا النوع من المقادير الجبرية يكون فيها معامل ax^2 , $a > 1$ اكبر من واحد . ويعتمد في تحليله على التجرب .

حيث نحلل معامل x^2 والحد الثالث .

مثـــال حلل كل مقدار من المقادير التالية

① تسأل نفسك هل يوجد عامل مشرك؟ اذا وجد تسحبه خارج قوس وتحلل القوس

② نفتح قوسين صغيرات ونوزع عليهما الحد التربيعي $(y \quad)(y \quad)$

③ نضع في القوس الاول حاصل ضرب اشارة الحد الاول × اشارة الحد الثاني $- = - \times +$

نضع في القوس الثاني حاصل ضرب اشارة الحد الثاني × اشارة الحد الثالث $+ = - \times -$

④ نضرب معامل y^2 في الحد الثالث $7 \times 8 = 56$

⑤ ثم نحلل 56 الى عددين حاصل طرحهما 26

⑥ نضع العدد الكبير في القوس الاول العدد الصغير في القوس الثاني

⑦ نقسم معامل y^2 من الاعداد اذا كان لها باقي تبقى واذا كانت بدون باقي فيصبح الكسر معامل المتغير في نفس القوس

عوامل 56	طرح
(56)(1)	55
(8)(7)	1
(28)(2)	26

❶ $7y^2 - 26y - 8$

$= (y-28)(y+2)$

$= \left(y - \frac{28}{7}\right)\left(y + \frac{2}{7}\right)$

$= (y-4)(7y+2)$

$-28y$, $+2y$, $-26y$

يساوي الحد الثاني $-26y = -26y$

سوف نكمل كل الامثلة التالية بهذه الطريقة

❷ $6x^2 + 17x + 7$

عوامل 42	جمع
(42)(1)	43
(21)(2)	23
(14)(3)	17

$= \left(x + \frac{14}{6}\right)\left(x + \frac{3}{6}\right)$

$= (3x+7)(2x+1)$

$+14x$, $+3x$, $+17x$

يساوي الحد الثاني $+17x = +17x$

❸ $3z^2 - 17z + 10$

عوامل 30	جمع
(30)(1)	31
(15)(2)	17

$= \left(z - \frac{15}{3}\right)\left(z - \frac{2}{3}\right)$

$= (z-5)(3z-2)$

$-15z$, $-2z$, $-17z$

يساوي الحد الثاني $-17z = -17z$

❹ $4v^2 - v - 3$

عوامل 12	طرح
(12)(1)	11
(4)(3)	1

$= \left(v - \frac{4}{4}\right)\left(v + \frac{3}{4}\right)$

$= (v-1)(4v+3)$

$-4v$, $+3v$, $-1v$

يساوي الحد الثاني $-1v = -1v$

❺ $15 + 11h + 2h^2$

عوامل 30	جمع
(30)(1)	31
(6)(5)	11

$= (5+2h)(3+h)$

$+6h$, $+5h$, $+11h$

يساوي الحد الثاني $+11h = +11h$



❼ $12 + 14z - 6z^2$

يوجد عامل مشترك نسحبه خارج قوس ثم نحلل القوس

$= 2(6 + 7z - 3z^2)$

$= 2\left(\frac{2}{3} + z\right)\left(\frac{9}{3} - z\right)$

$= 2(2 + 3z)(3 - z)$

عوامل 18	طرح
(18)(1)	17
(9)(2)	7

$+9z$ ، $-2z$ ، $+7z$

يساوي الحد الثاني $+7z = +7z$

❻ $8 - 25z + 3z^2$

$= \left(\frac{1}{3} - z\right)\left(\frac{24}{3} - z\right)$

$= (1 - 3z)(8 - z)$

عوامل 24	جمع
(24)(1)	25

$-24z$ ، $-1z$ ، $-25z$

يساوي الحد الثاني $-25z = -25z$

عندما يكون المتغير التربيعي في النهاية فنضع العدد الكبيرفي القوس الثاني لانه يعتبر الاقوس الاول

❾ $3x^2 - 10xy + 3y^2$

$= \left(x - \frac{9y}{3}\right)\left(x - \frac{1y}{3}\right)$

$= (x - 3y)(3x - y)$

عوامل 9	جمع
(9)(1)	10

$-9xy$ ، $-1xy$ ، $-10xy$

يساوي الحد الثاني $-10xy = -10xy$

❽ $6x^2 - 51x + 63$

يوجد عامل مشترك نسحبه خارج قوس ثم نحلل القوس

$= 3(2x^2 - 17x + 21)$

$= 3\left(x - \frac{14}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$= 3(x - 7)(2x - 3)$

عوامل 42	جمع
(42)(1)	43
(21)(2)	23
(14)(3)	17

$-14x$ ، $-3z$ ، $-17x$

يساوي الحد الثاني $-17x = -17x$

❿ $\frac{1}{4}y^2 - 2y + 3$

$= \left(\frac{1}{2}y - 3\right)\left(\frac{1}{2}y - 1\right)$

$-\frac{3}{2}y$ ، $-\frac{1}{2}y$ ، $-\frac{4}{2}y = -2y$

يساوي الحد الثاني $-2y = -2y$

H.W حل كل مقدار من المقادير التالية

❶ $3x^2 - 10x + 8$ Ans $= (3x - 4)(x - 2)$

❷ $3y^2 - 14y + 8$ Ans $= (3y - 2)(y - 4)$

❸ $6 + 29z - 5z^2$ Ans $= (6 - z)(1 + 5z)$

❹ $5y^2 - y - 6$ Ans $= (5y - 6)(y + 1)$

❺ $10 + 9z - 9z^2$ Ans $= (2 + 3z)(5 - 3z)$

❻ $50 - 20z + 2z^2$ Ans $= 2(5 - z)(5 - z)$

❼ $6z^2 - \frac{4}{3}z - \frac{2}{9}$ Ans $= (3z + \frac{1}{3})(2z - \frac{2}{3})$

❽ $13y^2 - 11y - 2$ Ans $= (y - 1)(13y + 2)$

❾ $3y^2 - 19yx - 14x^2$ Ans $= (y - 7x)(3y + 2x)$

❿ $16y^2 - 2yx - 3x^2$ Ans $= (2y - x)(8y + 3x)$

⓫ $6z^2 - 2zx - 4x^2$ Ans $= 2(z - x)(3z + 2x)$

⓬ $30x^2 - xy - y^2$ Ans $= (6x + y)(5x - y)$



مثـــال ضع الاشارات بين الحدود ليصبح التحليل صحيح

❷ $y^2 - 12y + 20 = (y \cdots 2)(y \cdots 10)$ $= (y - 2)(y - 10)$	❶ $x^2 + 9x + 20 = (x \cdots 4)(x \cdots 5)$ $= (x + 4)(x + 5)$ نضع الاشارات من خلال ضرب اشارة الحد الاول في الثاني .وضرب اشارة الحد الثاني في الثالث وبعد ذلك نحقق اذا كان الناتج خطا نبدل الاشارات .
❹ $6x^2 - 7x + 2 = (2x \cdots 1)(3x \cdots 2)$ $= (2x - 1)(3x - 2)$	❸ $21 + 4y - y^2 = (7 \cdots y)(3 \cdots y)$ $= (7 - y)(3 + y)$
❻ $35 + 3y - 2y^2 = (5 \cdots y)(7 \cdots 2y)$ $(5 - y)(7 + 2y)$	❺ $20 - 7y - 3y^2 = (5 \cdots 3y)(4 \cdots y)$ $= (5 - 3y)(4 + y)$

H.W ضع الاشارات بين الحدود ليصبح التحليل صحيح

❸ $x^2 - x - 56 = (x \cdots 7)(x \cdots 8)$	❷ $x^2 + x - 20 = (x \cdots 4)(x \cdots 5)$	❶ $3x^2 - 5x + 2 = (x \cdots 1)(3x \cdots 2)$

القناعة كنزٌ..........لا يَفنى

مسائل حياتية



❶ **الثور المجنح:** الثور المجنح الآشوري (شيدو لا ماسو) هكذا يرد اسمه في الكتابات الآشورية . واصل كلمة لاماسو هو من لامو lammu السومرية ويوجد تمثال له في متحف مدينة الموصل . ما ابعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتمتراً تربيعاً ؟



الجواب: مساحة الثور المجنح = (الطول)(العرض) نعوض عن المساحة من المعطى في السؤال

(الطول)(العرض) $= x^2 + 10x + 21$ نحلل المساحة بالتجربة

(الطول)(العرض) $= (x + 7)(x + 3)$

من خلال تساوي الطرفين فتكون ابعاد اللوحة بالسنتمترات . . . . الطول= $(x + 7)$ ، $(x + 3)$ = العرض

❷ **مترو الانفاق**: يعد مترو الانفاق نظام سكك حديد تحت الارض وتسير عليه القطارات هو احد الوسائل الحديثة والسريعة في النقل. ويتألف كل قطار من عدة عربات فإذا كان المقدار $14y^2 - 23y + 3$ يمثل مساحة ارضية العربة بالمتر المربع فما ابعادها بدلالة y؟



الجواب: مساحة عربة القطار = (الطول)(العرض)

نعوض عن المساحة من المعطى في السؤال

نحلل المساحة بالتجربة

$14y^2 - 23y + 3 =$ (العرض)(الطول)

(العرض)(الطول) $= (2y - 3)(7y - 1)$

من خلال تساوي الطرفين فتكون ابعاد العربة بالأمتار .... الطول= $(7y - 1)$ ، $(2y - 3) =$ العرض

---

❸ **قلعة الاخيضر**: قلعة الاخيضر هي قلعة اثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولاتزال اطلالتها قائمة لحد يومنا هذا. الاخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط بها سور عظيم مستطيل الشكل. ما ابعاد السور الخارجية بدلالة x اذا كانت مساحة القلعة مع السور يمثلها المقدار $6x^2 - 39x + 60$ متراً مربعاً؟



الجواب: مساحة القلعة = (الطول)(العرض)

نعوض عن المساحة من المعطى في السؤال

نحلل المساحة بالتجربة

$6x^2 - 39x + 60 =$ (العرض)(الطول)

(العرض)(الطول) $= (2x - 5)(3x - 12)$

من خلال تساوي الطرفين فتكون ابعاد السور بالأمتار.... $(2x - 5)$ ، $(3x - 12)$

---

❹ **العاب ترفيهية**: تعد الأرجوحة من الالعاب الممتعة في مدينة الالعاب. ويمثل المقدار $5t^2 + 5t - 30$ مسار الأرجوحة. في مدينة الالعاب. اذ يمثل t زمن الحركة. و تحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه ارجحتها في المرة الاولى. حلل المقدار؟





نحلل المقدار بالتجربة. لأنه متكون من ثلاث حدود ولا يمثل مربع كامل

$5t^2 + 5t - 30$

$= (t + 3)(5t - 10)$

المقدار يمثل وقت ارجحت الأرجوحة في المرة الاولى $(t + 3)(5t - 10)$

فكر

أولاً تحدِ حل المقدار الجبري الاتي الى ابسط صوره

$4x^3 + 4x^2 - 9x - 9$

نحلل المقدار بخاصية التجميع \ لأنه مكون من اربع حدود

sol: $= (4x^3 + 4x^2) + (-9x - 9)$

$= 4x^2(x + 1) + (-9)(x + 1)$

$= 4x^2(x + 1) - 9(x + 1)$

$= (x + 1)(4x^2 - 9)$

عند سحب عامل مشترك سالب يصبح السالب يصبح موجب والموجب يصبح سالب


ثانياً اصحح الخطأ حل سعد المقدار $6z^2 - 16z - 6$ كما يلي

$6z^2 - 16z - 6 = (3z - 1)(2z + 6)$ حدد خطأ سعد وصححه ؟

SOL:

نحلل المقدار اولا . . ثم نحدد الاخطاء

$6z^2 - 16z - 6$

$= (3z + 1)(2z - 6)$


نلاحظ ان خطأ سعد هو في تبديل اشارة القوس الاول بإشارة القوس الثاني


ثالثاً حس عددي أيمكن تحديد ما اذا كانت اشارات قوسين المقدار $x^2 - 12x + 35$ مختلفة ام متشابهة بدون تحليل المقدار ؟ وضح اجابتك

الجواب: تكون الاشارات متشابهة لان اشارة الحد الثاني سالبة واشارة الحد الثالث موجبة .

لأنه عند ضرب اشارة الحد الأول × الحد الثاني = اشارة سالبة وعند ضرب اشارة الحد الثاني × اشارة الحد الثالث = اشارة سالبة


رابعاً اكتب اشارات الحدود في الاقواس ليكون تحليل المقدار صحيح

$6z^2 + 5z - 56 = (3z \cdots 8)(2z \cdots 7)$

SOL:

$6z^2 + 5z - 56 = (3z - 8)(2z + 7)$

Multiple Choice — الاختيار من متعدد

الدرس [4-2] تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

Using Probe and Error to factor Algebraic Expression contains three terms

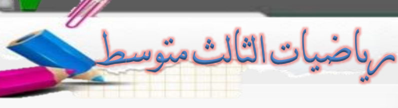
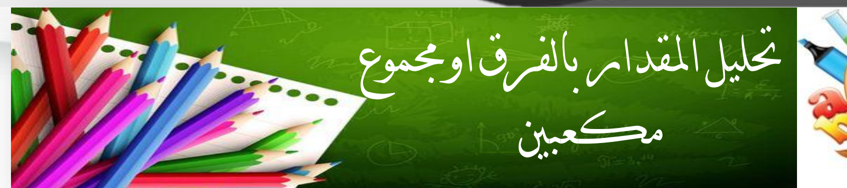
اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

1. $x^2 + 7x + 12$
   a) $(x - 3)(x + 4)$ — ✓ b) $(x + 3)(x + 4)$ — c) $(x - 1)(x + 7)$ — d) $(x - 3)(x - 4)$
2. $x^2 - 5x - 36$
   a) $(x - 6)(x + 6)$ — b) $(x + 12)(x - 3)$ — ✓ c) $(x - 9)(x + 4)$ — d) $(x + 9)(x - 4)$
3. $y^2 + 4y - 21$
   a) $(y - 7)(y + 3)$ — ✓ b) $(y + 7)(y - 3)$ — c) $(y – 7)(y - 3)$ — d) $(y + 7)(y + 3)$
4. $4x^2 + 10x + 6$
   a) $(x – 6)(4x + 1)$ — b) $(4x + 2)(x - 3)$ — c) $(4x – 6)(x - 1)$ — ✓ d) $(2x + 3)(2x + 2)$
5. $24y^2 - 2y - 1$
   ✓ a) $(4y - 1)(6y + 1)$ — b) $(2y - 1)(12y - 1)$ — c) $(4y + 1)(6y - 1)$ — d) $(3y – 1)(8y + 1)$
6. $10x^2 - 11x + 1$
   a) $(5x - 1)(2x + 1)$ — b) $(10x + 1)(x - 1)$ — c) $(5x + 1)(2x - 1)$ — ✓ d) $(10x - 1)(x - 1)$
7. $22 +3z - 4z^2$
   a) $(11 + 4z)(2 - z)$ — b) $(22 - 4 z)(1 + z)$ — ✓ c) $(11 - 4z)(2 + z)$ — d) $(22 + 8z)(1 - z)$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

8. $x^2 + 15x + 26 = (x…2)(x…13)$
   a) $(x - 2)(x - 13)$ — b) $(x - 2)(x + 13)$ — ✓ c) $(x + 2)(x + 13)$ — d) $(x + 2)(x - 13)$
9. $4y^2 -2y -12 = (2y…3)(2y…4)$
   a) $(2y - 3)(2y + 4)$ — b) $(2y + 3)(2y + 4)$ — c) $(2y - 3)(2y - 4)$ — ✓ d) $(2y + 3)(2y - 4)$
10. $48 - 30z + 3z^2 = (6…3z)(8… z)$
   ✓ a) $(6 - 3z)(8 - z)$ — b) $(6 + 3z)(8 + z)$ — a) $(6 - 3z)(8 + z)$ — b) $(6 + 3z)(8 - z)$


تحليل المقدار بالفرق او مجموع مكعبين

الدرس (2 – 5)

تعلمنا في الدرس الاول كيف نضرب مقدار جبري من حدين × مقدار جبري من ثلاث حدود على صورة فرق او مجموع مكعبين بالقانون

واليوم سوف تتعلم تحليله . . . وهي العملية العكسية لعملية الضرب . "راجع صفحة 3 من الدرس الاول"

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) \quad \text{حيث} \quad x = \sqrt[3]{x^3} \;,\; y = \sqrt[3]{y^3}$$

مميزات الفرق او مجموع مكعبين

❶ الفرق بين مكعبين هو الذي تكون اشارة سالبة بين الحدين $x^3 - y^3$ و الجموع مكعبين الذي تكون اشارة موجبه $x^3 + y^3$

❷ يكون المقدار مكون من حدين فقط بينهما علامة جمع او طرح .

❸ يكون للمتغيراس تكعيبي x^3 وللرقم جذر تكعيبي $2 = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8}$. واذا لم يكن له جذر لا بد من وجود عامل مشترك

❹ يتحلل بالقانون التالي $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$.



مثال
حلل كل مقدار من المقادير التالية

❶ $x^3 + 5^3$

① نفتح قوس صغير وقوس كبير (   )(   )
② نضع في القوس الصغير من المقدار الجبري الاصلي.
الجذر التكعيبي للحد الاول $\sqrt[3]{x^3} = x$ ونفس الاشارة + والجذر التكعيبي للحد الثاني $\sqrt[3]{5^3} = 5$
③ نضع في القوس الكبير من القوس الصغير.
تربيع الحد الاول x^2 و عكس الاشارة – الحد الاول × الحد الثاني $5x$ و موجب دائماً + تربيع الحد الثاني 25
سوف نحل بقية الامثل على هذه الترتيب

$= (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

❷ $y^3 - 64$

$\sqrt[3]{y^3} = y$
$\sqrt[3]{64} = 4$
$(y)^2 = y^2$
$(y)(4) = 4y$
$(4)^2 = 16$

$= (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$



❸ $8z^3 + 27$

$\sqrt[3]{8z^3} = 2z$, $\sqrt[3]{27} = 3$, $(2z)^2 = 4z^2$, $(2z)(3) = 6z$, $(3)^2 = 9$

$= (2z + 3)(4z^2 - 6z + 9)$

❹ $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125}$

$\sqrt[3]{\frac{1}{b^3}} = \frac{1}{b}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$, $\left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{1}{b^2}$, $\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5b}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$

$= \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$

❺ $\frac{27}{x^3} + \frac{8}{125}$

$\sqrt[3]{\frac{27}{x^3}} = \frac{3}{x}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$, $\left(\frac{3}{x}\right)^2 = \frac{9}{x^2}$, $\left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{5x}$, $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$

$= \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25}\right)$

❻ $\frac{1}{2}t^3 + 4$

نلاحظ ان الحدود ليس لها جذور تكعيبيه.
اذن يوجد عامل مشترك . $4 \times \frac{2}{1} = 8$

$= \frac{1}{2}(t^3 + 8)$

$\sqrt[3]{t^3} = t$, $\sqrt[3]{8} = 2$, $(t)^2 = t^2$, $(t)(2) = 2t$, $(2)^2 = 4$

$= \frac{1}{2}(t + 2)(t^2 - 2t + 4)$

❼ $0.125 + v^3$

نحول العدد العشري الى كسري؟
يقرى 125 بالألف ويكتب $\frac{125}{1000}$

$= \frac{125}{1000} + v^3$

$\sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{5}{10}$, $\sqrt[3]{v^3} = v$, $\left(\frac{5}{10}\right)^2 = \frac{25}{100}$, $\left(\frac{5}{10}\right)(v) = \frac{5}{10}v$, $(v)^2 = v^2$

$= \left(\frac{5}{10} + v\right)\left(\frac{25}{100} - \frac{5}{10}v + v^2\right)$

$= (0.5 + v)(0.25 - 0.5v + v^2)$

❽ $0.027x^3 - 0.008v^3$

نحول العدد العشري الى كسري؟ يقرى 27 بالألف ويكتب $\frac{27}{1000}$
يقرى 8 بالألف ويكتب $\frac{8}{1000}$

$= \frac{27}{1000}x^3 - \frac{8}{1000}v^3$

$\sqrt[3]{\frac{27}{1000}x^3} = \frac{3}{10}x$, $\sqrt[3]{\frac{8}{1000}v^3} = \frac{2}{10}v$, $\left(\frac{3}{10}x\right)^2 = \frac{9}{100}x^2$, $\left(\frac{3}{10}x\right)\left(\frac{2}{10}v\right) = \frac{6}{100}xv$, $\left(\frac{2}{10}v\right)^2 = \frac{4}{100}v^2$

$= \left(\frac{3}{10}x - \frac{2}{10}v\right)\left(\frac{9}{100}x^2 + \frac{6}{100}xv + \frac{4}{100}v^2\right)$

ثـم نحولها الى الصيغة العشرية مره ثانية

$= (0.3x - 0.2v)(0.09x^2 + 0.06xv + 0.04v^2)$

❾ $1 + 0.008z^3$

$= 1 + \frac{8}{1000}z^3$

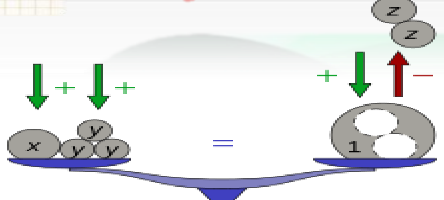
$\sqrt[3]{1} = 1$, $\sqrt[3]{\frac{8}{1000}z^3} = \frac{2}{10}z$, $(1)^2 = 1$, $(1)\left(\frac{2}{10}z\right) = \frac{2}{10}z$, $\left(\frac{2}{10}z\right)^2 = \frac{4}{100}z^2$

$= \left(1 + \frac{2}{10}z\right)\left(1 - \frac{2}{10}z + \frac{4}{100}z^2\right)$

$= (1 + 0.2z)(1 - 0.2z + 0.04z^2)$

علمتني الرياضيات .... ان الناقص مهما ضربته مع موجب يبقى ناقصاً





امثله اضافية حلل كل مقدار من المقادير التالية

❶ $32-\frac{1}{2}m^3$

نلاحظ ان الحدود ليس لها جذور تكعيبية.
اذن يوجد عامل مشترك $32\times\frac{2}{1}=64$

$=\frac{1}{2}(64-m^3)$

$=\frac{1}{2}(4-m)(16+4m+m^2)$

❷ $\frac{1}{3}t^3+9$

نلاحظ ان الحدود ليس لها جذور تكعيبية.
اذن يوجد عامل مشترك $9\times\frac{3}{1}=27$

$=\frac{1}{3}(t^3+27)$

$=\frac{1}{3}(t+3)(t^2-3t+9)$

❸ $\frac{1}{a^3}-\frac{1}{125}$

$=(\frac{1}{a}-\frac{1}{5})(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{5a}+\frac{1}{25})$

❹ $25c^3-\frac{1}{5}$

نلاحظ ان الحدود ليس لها جذور تكعيبية.
اذن يوجد عامل مشترك $25\times\frac{5}{1}=125$

$=\frac{1}{5}(125c^3-1)$

$=\frac{1}{5}(5c-1)(25c^2+5c+1)$

❺ $1+0.216z^3$

$\sqrt[3]{\frac{216}{1000}z^3}=\frac{6}{10}z$

$=1+\frac{216}{1000}z^3$

$=(1+\frac{6}{10}z)(1-\frac{6}{10}z+\frac{36}{100}z^2)$

$=(1+0.6z)(1-0.6z+0.36z^2)$

❻ $0.001x^3-0.008y^3$

$=\frac{1}{1000}x^3-\frac{8}{1000}y^3$

$=(\frac{1}{10}x-\frac{2}{10}y)(\frac{1}{100}x^2+\frac{2}{100}xy+\frac{4}{100}y^2)$

$=(0.1x-0.2y)(0.01x^2+0.02xy+0.04y^2)$

او بطريقة ثانية

$=\frac{1}{1000}(x^3-8y^3)$

$=\frac{1}{1000}(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$

❼ $0.027n^3-0.064m^3$

$=\frac{27}{1000}n^3-\frac{64}{1000}m^3$

$=\frac{1}{1000}(27n^3-64m^3)$

$=\frac{1}{1000}(3n-4m)(9n^2+12nm+16m^2)$

❽ $3b^3-81$

نلاحظ ان الحدود ليس لها جذور تكعيبية.
اذن يوجد عامل مشترك $81\times\frac{1}{3}=27$

$=3(b^3-27)$

$=3(b-3)(b^2+3b+9)$

ملاحظه: عندما نسحب 3 نضرب الحد الثاني في $\frac{1}{3}$

لكن عندما نسحب $\frac{1}{3}$ نضرب الحد الثاني في $\frac{3}{1}$ أي العكس

H.W حلل كل مقدار من المقادير التالية

❶ y^3+343 Ans $=(y+7)(y^2-7y+49)$	❷ y^3+216 Ans $=(y+6)(y^2-6y+36)$	❸ $125+8z^3$ Ans $=(5+2z)(25-10z+z^2)$
❹ $\frac{1}{c^3}-\frac{1}{8}$ Ans $=(\frac{1}{c}-\frac{1}{2})(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{2c}+\frac{1}{4})$	❺ $\frac{1}{64}+\frac{8}{125}y^3$ Ans $=(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}y)(\frac{1}{16}-\frac{2}{20}y+\frac{4}{25}y^2)$	❻ $0.027+27n^3$ Ans $=27(0.1+n)(0.01-0.1n+n^2)$
❼ $9-\frac{1}{3}n^3$ Ans $=\frac{1}{3}(3-n)(9+3n+n^2)$	❽ $\frac{1}{5}v^3+25$ Ans $=\frac{1}{5}(v+5)(v^2-5v+25)$	❾ $0.216v^3+0.008t^3$ Ans $=(0.6v+0.2t)(0.06v-0.12vt+0.04t^2)$





❶ **سكن:** بدأت المنازل تأخذ اشكالاً مختلفة في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصُمّمت هذه المنازل على شكل مكعبات .

فاذا كان حجم المنزل الاول $\frac{8}{a^3}$ متر مكعب وحجم المنزل الثاني $\frac{27}{b^3}$ متر مكعب . اكتب حجم المنزلين معاً ثم حلل المقدار؟

SOL :

حجم المنزلين (v) = حجم المنزل 1 (v_1) + حجم المنزل 2 (v_2)

$$v=\frac{8}{a^3}+\frac{27}{b^3}$$

نكتب مقدار مجموع حجم المنزلين

$$v=(\frac{2}{a}+\frac{3}{b})(\frac{4}{a^2}-\frac{6}{ab}+\frac{9}{b^2})$$

ثم نحلل المقدار بمجموع مكعبين





❷ **حوض سمك**: حوض سمك زينة على شكل مكعب حجمة $25x^3$ متر مكعب . وضع في داخلة حجر مكعب الشكل حجمة $\frac{1}{5}$ متر مكعب . مُلِئَ بالماء كاملاً . اكتب المقدار الذي يمثل حجم الماء ثم حلله ؟

SOL :



حجم الماء (v) = حجم الحوض − حجم الحجر

نكتب مقدار حجم الماء

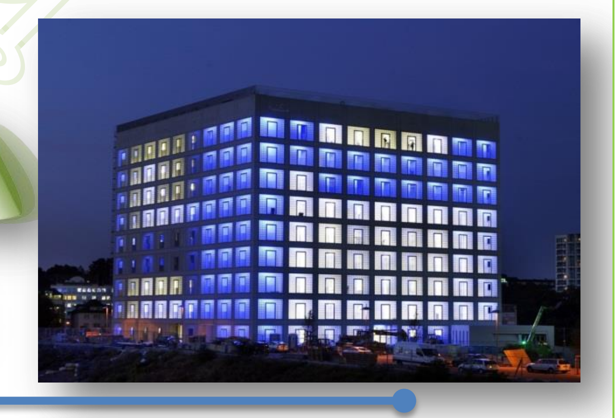
$v = 25x^3 - \frac{1}{5}$

$v = \frac{1}{5}(125x^3 - 1)$

$v = \frac{1}{5}(5x - 1)(25x^2 + 5x + 1)$

❸ **مكتبة**: مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من اجمل المكتبات في العالم وافخمها وتقع في المانيا . بناية المكتبة على شكل مكعب طول ضلعة $\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$ متر . حلل المقدار الذي يمثل طول حرفه ؟

SOL :



تتخلص من العدد الصحيح $13\frac{1}{2} = \frac{2\times13+1}{2} = \frac{27}{2}$

نستخرج عامل مشترك . ثم نحلل

$\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}y^3 - \frac{27}{2}$

$= \frac{1}{2}(y^3 - 27)$

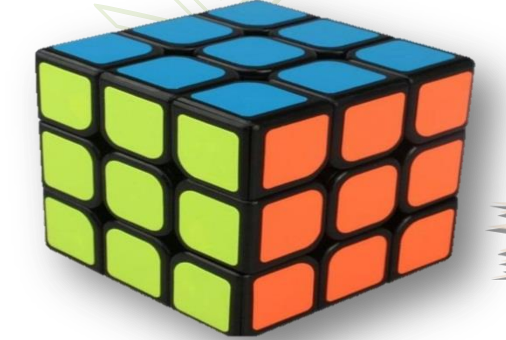
$= \frac{1}{2}(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$

❹ **مكعب روبيك**: مكعب روبيك هو لغز ميكانيكي ثلاثي الابعاد اخترعه النحات واستاذ العماره المجري إرنو روبيك عام 1974م ماجموع مكعب روبك الاول طول ضلعة $3dcm$ والثاني طول ضلعة $4dcm$ ؟



الجواب: تذكير : حجم المكعب = (الطول)(العرض)(الارتفاع) = $(\text{طول الضلع})^3$ لان أضلاعه متشابه

حجم روبيك 1 = $(3)^3$ و حجم روبيك 2 = $(4)^3$



مجموع حجوم المكعبين = $(3)^3 + (4)^3$ نكتب مقدار مجموع المكعبين

مجموع حجوم المكعبين = $(3 + 4)(9 - 12 + 16)$ نحلله بمجموع مكعبين

مجموع حجوم المكعبين = $(7)(13)$ نجد ناتج جمع القوسين ثم نضرب ناتج كل قوس مع الاخر

مجموع حجوم المكعبين = $91\ dcm^3$

❺ **حوض ماء :** حوض ماء على شكل مكعب طول ضلعه $1m$ مملوء بالماء . أفرغ الماء منه في حوض اخر اكبر منه ايضاً مكعب طول ضلعه $1.1\ m$ ما كمية الماء الاضافية التي يحتاج اليها ليمتلئ الحوض الكبير ؟



SOL:

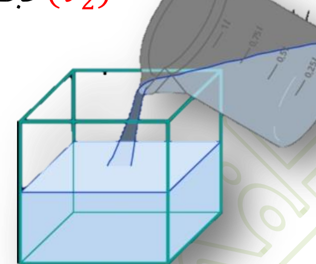
كمية الماء الاضافية = حجم المكعب الكبير (v_1) − حجم المكعب الصغير (v_2)

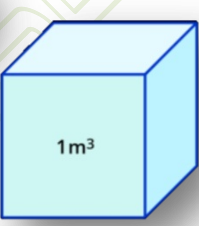
كمية الماء الاضافية $= (1.1)^3 - (1)^3$

كمية الماء الاضافية $= (1.1 - 1)\,(1.21 + 1.1 + 1)$

كمية الماء الاضافية $= (0.1)\,(3.31)$

كمية الماء الاضافية $= 0.331m^3$





فكر

اولاً تحدِ : حلل المقدار الجبري الاتي الى ابسط صورة

$0.002z^3 - 0.016y^3$

sol:

$$= \frac{2}{1000}z^3 - \frac{16}{1000}y^3$$

$$= \frac{2}{1000}(z^3 - 8y^3)$$

$$= \frac{2}{1000}(z - 2y)(z^2 + 2zy + 4y^2)$$



ثانياً اصحح الخطأ : حللت بشرى المقدار $8v^3 - 0.001$ كما يلي

$8v^3 - 0.001 = (2v + 0.1)(4v^2 - 0.4v + 0.01)$ حدد خطأ بشرى وصححه ؟

SOL:

نحلل المقدار اولاً . . ثم نحدد الاخطاء

$$8v^3 - 0.001 = 8v^3 - \frac{1}{1000}$$

$$= \left(2v - \frac{1}{10}\right)\left(4v^2 + \frac{4}{10}v + \frac{1}{100}\right) = (2v - 0.1)(4v^2 + 0.4v + 0.01)$$





نلاحظ ان خطأ بشرى هو في اشارة القوس الصغير حيث وضعت بدل السالب موجب . مما ادى الى حصول خطأ في اشارة الحد الوسط في القوس الكبير

ثالثاً حـس عـددي هل يمكن جمع العددين 27 , 8 بطريقة تحليل مجموع مكعبين ؟ وضح ذلك



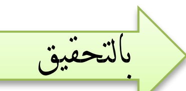
الجواب نعـم يمكـن:

$8 + 27 = (2)^3 + (3)^3$

$= (2 + 3)(4 - 6 + 9)$

$= (5)(7)$

$= 35$



$8 + 27 = 35$

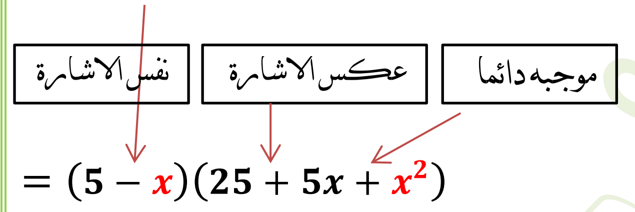


رابعاً اكتب اشارات الحدود في الاقواس ليكون تحليل المقدار صحيح

$125 - x^3 = (5 \cdots x)(25 \cdots 5x \cdots x^2)$



$125 - x^3$



$= (5 - x)(25 + 5x + x^2)$

لطيبة قلبك،
ونبل أخلاقك،
وجمال روحك،
أحبك الناس،
واصطفوا أمام قلبك كأنه متجر .
لأجل كل من يحبك،
لا تترك الهموم تسرق منك إبتسامتك .

الاختيارُ من متعدد Multiple Choice

الدرس [2-5] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين

Using the sum of two cubes or difference between two cubes to factor the Algebraic Expression

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية إلى أبسط صورة:

1. $8 + x^3$
   a) $(2 - x)(4 + 2x + x^2)$
   b) ✓ $(2 + x)(4 - 2x + x^2)$
   c) $(2 - x)(4 - 2x + x^2)$
   d) $(2 + x)(4 + 2x + x^2)$

2. $8y^3 + 27$
   a) $(2y + 3)(4y^2 + 6y + 9)$
   b) $(2y - 3)(4y^2 + 6y + 9)$
   c) ✓ $(2y + 3)(4y^2 - 6y + 9)$
   d) $(2y - 3)(4y^2 - 6y + 9)$

3. $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{64}$
   a) $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$
   b) $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$
   c) $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$
   d) ✓ $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

4. $\frac{27}{125} + \frac{8}{x^3}$
   a) $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} + \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$
   b) $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$
   c) ✓ $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$
   d) $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} - \frac{4}{x^2})$

5. $0.027 + z^3$
   a) $(0.03 + z)(0.09 - 0.3z + z^2$
   b) $(0.03 + z)(0.009 - 0.03z + z^2)$
   c) $(0.3 + z)(0.9 - 0.3z + z^2)$
   d) ✓ $(0.3 + z)(0.09 - 0.3z + z^2)$

6. $\frac{8}{y^3} - \frac{1}{27}$
   a) $(\frac{2}{y} - \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} - \frac{2}{3y} + \frac{1}{9})$
   b) $(\frac{2}{y} + \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} - \frac{2}{3y} + \frac{1}{9})$
   c) ✓ $(\frac{2}{y} - \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} + \frac{2}{3y} + \frac{1}{9})$
   d) $(\frac{2}{y} - \frac{1}{3})(\frac{4}{y^2} + \frac{2}{3y} - \frac{1}{9})$

7. $9 - \frac{1}{3}z^3$
   a) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z - z^2)$
   b) ✓ $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z + z^2)$
   c) $\frac{1}{3}(3 + z)(9 + 3z + z^2)$
   d) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 - 3z + z^2)$

8. $0.008x^3 - 1$
   a) $(0.02x - 1)(0.04x^2 + 0.002x + 1)$
   b) $(0.02x - 1)(0.04x^2 + 0.02x + 1)$
   c) $(0.2x + 1)(0.4x^2 - 0.2x + 1)$
   d) ✓ $(0.2x - 1)(0.04x^2 + 0.2x + 1)$









تعرفنا في الدروس السابقة على حالات تحليل المقادير الجبرية واليوم سوف نستخدم هذه الحالات في تبسيط مقادير كسرية جبرية

مراجعة لحالات تحليل المقادير الجبرية **ولكن سوف نقسمها حسب عدد حدودها** ثم ندخل في درس اليوم .

تحليل الحدوديات الثنائية

- العامل المشترك الاكبر: $2xy + 4xz = 2x(y + 2z)$
- الفرق بين مربعين: $x^2 - 4 = (x - 2)(x - 2)$
- فرق او مجموع مكعبين: $x^3 + z^3 = (x + z)(x^2 - xz + z^2)$

تحليل الحدوديات الثلاثية

- العامل المشترك الاكبر: $2x^2 + 4xz + 2z^2 = 2(x^2 + 2xz + z^2)$
- المربع الكامل: $x^2 + 2xz + z^2 = (x + z)^2$
- التجربة بنوعيها: $x^2 - 9x + 14 = (x + 7)(x + 2)$

تحليل الحدوديات الرباعية \ بالتجميع فقط

$3x^3 - 9x^2 + 5x - 15 = (x - 3)(3x^2 + 5)$

اولاً تبسيط المقادير الكسرية التي بينهما علامة ضرب او قسمة : كما في الامثلة التالية .

مثال أكتب كل مقدار من المقادير التالية بابسط صوره

① قبل أي شيء تسأل نفسك ؟ هل يوجد عامل مشترك . اذا كان موجود تسحبه خارج قوس ومن ثم تحلل القوس . واذا كان لا تحلل مباشر .

② هل المقدار ثنائي الحدود ام ثلاثي . لكي تحلله حسب عدد الحدود

③ نحلل كل مقدار ثم نختصر الحدود المتشابهة في البسط مع المقام .

④ نكتب المقادير المتبقية بعد الاختصار في الناتج .

❶ $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

حدودية ثنائية تحلل فرق مربعين

حدودية ثلاثية تحلل مربع كامل

$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}$

$= \frac{(x+2)}{(x-2)}$

سنكمل بقية الامثله بهذه الشكل

في عملية الضرب يحق لنا الاختصار في المقادير المتشابهة من البسط والمقام سواء من نفس الكسر او مع الكسر الثاني

❷ $\frac{5z+10}{z-3} \times \frac{z^3-27}{z^2+6z+8}$

حدودية ثنائية تحلل بالفرق بين مكعبين

حدودية ثلاثية تحلل بالتجربة

$= \frac{5(z+2)}{z-3} \times \frac{(z-3)(z^2+3z+9)}{(z+4)(z+2)}$

$= \frac{5(z^2+3z+9)}{(z+4)}$

القوس الكبير الناتج من فرق او مجموع مكعبين لا يتحلل مره ثانية

❸ $\frac{16-x^2}{3x+5} \times \frac{3x^2+2x-5}{x^2+3x-4}$

$4+x = x+4$

$= \frac{(4-x)(4+x)}{3x+5} \times \frac{(3x+5)(x-1)}{(x+4)(x-1)}$

$= (4-x)$

❹ $\frac{8+t^3}{4-2t+t^2} \div \frac{(2+t)^3}{t^2+9t+14}$

عندما يكون بين الكسرين عملية قسمة نحولها الى ضرب ونقلب الكسر الثاني بعد علامة القسمة

$= \frac{8+t^3}{4-2t+t^2} \times \frac{t^2+9t+14}{(2+t)^3}$

$= \frac{(2+t)(4-2t+t^2)}{4-2t+t^2} \times \frac{(t+7)(t+2)}{(2+t)^3}$

$= \frac{(t+7)}{(2+t)}$

لماذا لم نحلل هذه المقدار؟ لان هذه المقدار هو ناتج من القوس الكبير من الفرق او مجموع مكعبين\ كيف نعرفه؟

يكون المقدار على شكل مربع كامل ولكن لا يحقق قانون الحد الوسط؟ الحد الوسط $2(2)(t) = 4t \neq$

❶ عندما يكون ناتج تطبيق قانون الحد الوسط هو من مضاعفات الحد الوسط في المقدار الجبري فأن المقدار الجبري لا يتحلل.

❷ عندما يكون ليس من مضاعفات الحد الوسط فيكون احتمال تحليله بالتجربة او لا يتحلل الا بالدستور

❺ $\frac{2y^2-2y}{y^2-9} \div \frac{y^2+y-2}{y^2+2y-3}$

عندما يكون بين الكسرين عملية قسمة نحولها الى ضرب ونقلب الكسر الثاني بعد علامة القسمة

$= \frac{2y^2-2y}{y^2-9} \times \frac{y^2+2y-3}{y^2+y-2}$

$= \frac{2y(y-1)}{(y-3)(y+3)} \times \frac{(y+3)(y-1)}{(y+2)(y-1)}$

$= \frac{2y(y-1)}{(y-3)(y+2)}$

❻ $\frac{5x+3}{x+3} \times \frac{x^2+5x+6}{25x^2-9}$

$= \frac{5x+3}{x+3} \times \frac{(x+3)(x+2)}{(5x-3)(5x+3)}$

$= \frac{x+2}{5x-3}$

❼ $\frac{y^2-7y}{y^3-27} \div \frac{y^2-49}{y^2+3y+9}$

$= \frac{y^2-7y}{y^3-27} \times \frac{y^2+3y+9}{y^2-49}$

$= \frac{y(y-7)}{(y-3)(y^2+3y+9)} \times \frac{y^2+3y+9}{(y-7)(y+7)}$

$= \frac{y}{(y-3)(y+7)}$



⑧ $\frac{64-z^3}{32+8z+2z^2} \div \frac{(4-z)^2}{16-z^2}$

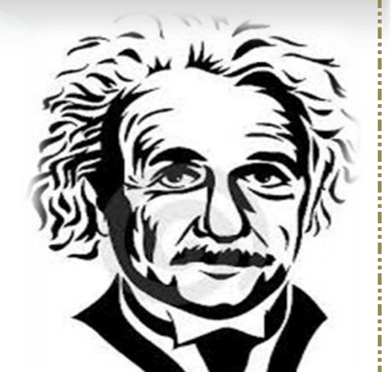
$= \frac{64-z^3}{32+8z+2z^2} \times \frac{16-z^2}{(4-z)^2}$

$= \frac{(4-z)(16+4z+z^2)}{2(16+4z+z^2)} \times \frac{(4-z)(4+z)}{(4-z)^2} = \frac{4+z}{2}$

⑨ $\frac{x+5}{12x} \times \frac{6x-30}{x^2-25}$

$= \frac{x+5}{12x} \times \frac{6(x-5)}{(x-5)(x+5)}$

$= \frac{1}{2x}$



⑩ $\frac{y^3+27}{y^3-3y^2+9y}$

$= \frac{(y+3)(y^2-3y+9)}{y(y^2-3y+9)}$

$= \frac{(y+3)}{y}$

⑪ $\frac{125+y^3}{25-5y+y^2} \div \frac{(5+y)^3}{y^2+10y+25}$

$= \frac{125+y^3}{25-5y+y^2} \times \frac{y^2+10y+25}{(5+y)^3}$

مربع كامل

$= \frac{(5+y)(25-5y+y^2)}{25-5y+y^2} \times \frac{(y+5)^2}{(5+y)^3} = 1$

⑫ $\frac{27-8z^3}{4z^2-9} \div \frac{9+6z+4z^2}{9+6z}$

$= \frac{27-8z^3}{4z^2-9} \times \frac{9+6z}{9+6z+4z^2}$

$= \frac{(3-2z)(9+6z+4z^2)}{(2z-3)(2z+3)} \times \frac{3(3+2z)}{9+6z+4z^2}$

$= \frac{3(3-2z)}{(2z-3)} = \frac{-3(2z-3)}{(2z-3)} = -3$

⑬ $\frac{27-x^3}{2x^2+6x+18} \div \frac{(3-x)^2}{x^2-x-6}$

اذا كانت الإشارة موجبه بين الحدين فيجوز مساواتهما. واذا كانت سالبه فلابد من اخراج سالب خارج القوس

$= \frac{27-x^3}{2x^2+6x+18} \times \frac{x^2-x-6}{(3-x)^2}$

$= \frac{(3-x)(9+3x+x^2)}{2(x^2+3x+9)} \times \frac{(x-3)(x+2)}{(3-x)^2}$

$2(3-x) = -2(x-3)$

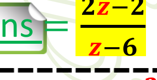
$= \frac{(x-3)(x+2)}{2(3-x)}$

$= \frac{(x-3)(x+2)}{-2(x-3)} = \frac{(x+2)}{-2}$

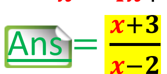


H.W

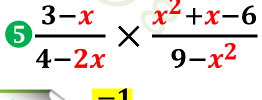
أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صوره

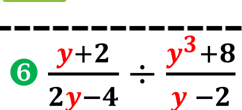
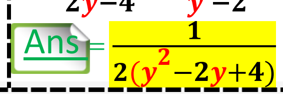
① $\frac{2z^2-4z+2}{z^2-7z+6}$   Ans $= \frac{2z-2}{z-6}$

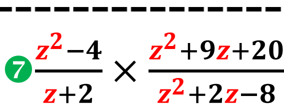
② $\frac{z^2+7z-8}{z-1} \times \frac{z^2-4}{z^2+6z-16}$   Ans $= z+2$

③ $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4} \times \frac{x^2-4}{x^2-x-6}$  Ans $= \frac{x+3}{x-2}$

④ $\frac{y+3}{2y^2+6y+18} \times \frac{y^3-27}{y^2-9}$  Ans $= \frac{1}{2}$

⑤ $\frac{3-x}{4-2x} \times \frac{x^2+x-6}{9-x^2}$   Ans $= \frac{-1}{2}$

⑥ $\frac{y+2}{2y-4} \div \frac{y^3+8}{y-2}$   Ans $= \frac{1}{2(y^2-2y+4)}$

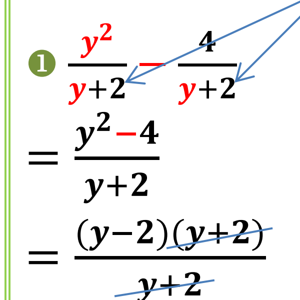
⑦ $\frac{z^2-4}{z+2} \times \frac{z^2+9z+20}{z^2+2z-8}$   Ans $= z+5$



ثانياً تبسيط المقادير الكسرية التي بينهما علامة جمع او طرح : كما في الامثلة التالية.

مثـــال أكتب كل مقدار من المقادير التالية بابسط صوره

نضيف الى النقاط السابقة في الضرب والقسمة نقطة مهمه .
اهم نقطة في الكسور الذي بينها جمع او طرح هو المقامات أي لا بد ان تكون المقامات موحدة حتى نستطيع ان نجمع او نطرح . اذا كانت غير موحدة يجب ان نوحدها . لان لا يمكن جمع او طرح كسور مقاماتها مختلفة



نلاحظ ان المقامات موحدة اذن يحق لنا الطرح

① $\frac{y^2}{y+2}-\frac{4}{y+2}$

$=\frac{y^2-4}{y+2}$

$=\frac{(y-2)(y+2)}{y+2}$

$=(y-2)$

نأخذ مقام واحد ونضع قيمة البسط الاول. والاشارة وقيمة البسط الثاني. ثم نحلل البسط فرق بين مربعين ونختصر المتشابه مع المقام

② $\frac{7x-14}{x^2-4}+\frac{5}{x+2}$

$=\frac{7(x-2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{5}{x+2}$

$=\frac{7}{(x+2)}+\frac{5}{x+2}$

$=\frac{7+5}{(x+2)}=\frac{12}{x+2}$

نلاحظ ان المقامات غير موحده ولكن يوجد تحليل للمقادير .نحلل ونختصر ثم ننظر مره اخرى للمقامات

هنا المقامات موحدة... يحق لنا الجمع

③ $\frac{t^2+2t+4}{t^3-8}+\frac{12}{3t-6}$

$=\frac{t^2+2t+4}{(t-2)(t^2+2t+4)}+\frac{12}{3(t-2)}$

$=\frac{1}{(t-2)}+\frac{4}{(t-2)}$

$=\frac{1+4}{(t-2)}=\frac{5}{t-2}$

④ $\frac{4z}{2z-5}-\frac{z}{z+3}$

نضرب مقام الكسر الاول في مقام الكسر الثاني نضعهما معا في كسر

$=\frac{4z}{(2z-5)}-\frac{z}{(z+3)}$

$=(z+3)$ ÷ $\qquad$ $=(2z-5)$ ÷

$=\frac{\square-\square}{(2z-5)(z+3)}$

في حالة المقامات مختلفة ولا يوجد تحليل في المقادير ماذا نفعل ؟
نقوم بتوحيد المقامات ؟ كيف
باستخدام المضاعف المشترك الاصغر $l.c.m$: وهو حاصل ضرب العوامل المشتركة بأكبر اس وغير المشتركة . أي نضرب المقامات بدون تكرار .
تابع المخططات التالية

نقارن المقام الجديد مع المقام القديم .نأخذ المختلف ونضربه في البسط القديم ونضع الناتج في البسط الجديد

$=\frac{4z(z+3)-z(2z-5)}{(2z-5)(z+3)}$

$=\frac{4z^2+12z-2z^2+5z}{(2z-5)(z+3)}$

وزعنا خارج القوس على داخلة وجمعنا وطرحنا المتشابهات من الحدود

$=\frac{2z^2+17z}{(2z-5)(z+3)}=\frac{z(2z+17)}{(2z-5)(z+3)}$

⑤ $\frac{8}{v+4}+\frac{2}{v-4}-\frac{1}{v^2-16}$

نحلل بعض المقادير وننظر الى المقامات

$=\frac{8}{v+4}+\frac{2}{v-4}-\frac{1}{(v-4)(v+4)}$

نوحد المقامات ب $l.c.m$ \ اي نضربهم بدون تكرار ثم نجد البسوط بالمخطط

$=\frac{8(v-4)+2(v+4)-1}{(v-4)(v+4)}$

$=\frac{8v-32+2v+8-1}{(v-4)(v+4)}$

$=\frac{10v-25}{(v-4)(v+4)}=\frac{5(2v-5)}{(v-4)(v+4)}$

⑥ $\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-4x+3}$

نحلل بعض المقادير وننظر الى المقامات

$=\frac{2}{(x-3)(x+3)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}$

$=\frac{2(x-1)+3(x+3)}{(x-3)(x+3)(x-1)}$

$=\frac{2x-2+3x+9}{(x-3)(x+3)(x-1)}$

$=\frac{5x+7}{(x-3)(x+3)(x-1)}$

الى هنا لا يوجد تبسيط نتركه على حاله ويكون هو الناتج

⑦ $\frac{z^2+z+1}{z^4-z}-\frac{z+3}{z^2+2z-3}$

نستخرج عامل مشترك ثم نحلل فرق مكعبين

$=\frac{z^2+z+1}{z(z^3-1)}-\frac{z+3}{(z+3)(z-1)}$

$=\frac{z^2+z+1}{z(z-1)(z^2+z+1)}-\frac{z+3}{(z+3)(z-1)}$

$=\frac{1}{z(z-1)}-\frac{1}{(z-1)}=\frac{1-z}{z(z-1)}$

بعد توحيد المقامات نكون البسوط

$=\frac{-(z-1)}{z(z-1)}=\frac{-1}{z}$

نسحب اشارة سالبة لتتساوى الحدود ونختصر

⑧ $\frac{2y^3-128}{y^3+4y^2+16y}-\frac{y-1}{y}$

$=\frac{2(y^3-64)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}$

$=\frac{2(y-4)(y^2+4y+16)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}$

$=\frac{2(y-4)}{y}-\frac{y-1}{y}$

مقامات موحدة نأخذ احد المقامات ونطرح الكسر الثاني. اذا كانت الاشارة سالبه. نوزعها على الكسر الثاني

$=\frac{2(y-4)-(y-1)}{y}=\frac{2y-8-y+1}{y}$

$=\frac{y-7}{y}$

⑨ $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}-1$

$=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}-1$

$=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}-1$

$=\frac{(x+1)}{(x-1)}-1$

عندما يكون الكسر قيمته 1 فقط هناك حالتين للحل.

❶ اما نضع بدل 1 كسر مكون من بسط ومقام من نفس المقام الاصلي

❷ نجمع او نطرح المقام من البسط مباشرةً

$=\frac{(x+1)}{(x-1)}-\frac{(x-1)}{(x-1)}$

$=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)}$

$=\frac{x+1-x+1}{(x-1)}=\frac{x+1-x+1}{(x-1)}$

$=\frac{2}{(x-1)}$

اوبطريقة ثانية

نطرح المقام من البسط مباشرةً (نطرح لان العلامة بين 1 والكسر هي طرح)

$=\frac{(x+1)}{(x-1)}-1$

$=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x-1)}=\frac{x+1-x+1}{(x-1)}$

$=\frac{2}{(x-1)}$



امثلة اضافية أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صوره

① $\frac{y-3}{y-1}+\frac{5y-15}{(y-3)^2}-\frac{3y+1}{y^2-4y+3}$

$=\frac{y-3}{y-1}+\frac{5(y-3)}{(y-3)^2}-\frac{3y+1}{(y-3)(y-1)}$ — نوحد المقامات

$=\frac{y-3}{y-1}+\frac{5}{(y-3)}-\frac{(3y+1)}{(y-3)(y-1)}$

$=\frac{y-3(y-3)+5(y-1)-(3y+1)}{(y-3)(y-1)}$

$=\frac{y^2-6y+9+5y-5-3y-1}{(y-3)(y-1)}$

$=\frac{y^2-4y+3}{(y-3)(y-1)}$ — نحلل البسط بالتجربة ثم نختصر

$=\frac{(y-3)(y-1)}{(y-3)(y-1)}=1$

② $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-2}+\frac{4+2x+x^2}{x^3-8}$

$=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-2}+\frac{4+2x+x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{(x-2)}$

$=\frac{3-2+1}{x-2}=\frac{2}{x-2}$



③ $\frac{5}{x^2-36}-\frac{2}{x^2-12x+36}$

من تعريف $l.c.m$ هو ضرب العناصر المشتركة بأكبر اس. ناخذ قوس التربيع لأنه اكبر

$=\frac{5}{(x-6)(x+6)}-\frac{2}{(x-6)^2}$

$=\frac{5(x-6)-2(x+6)}{(x-6)^2(x+6)}$

$=\frac{5x-30-2x-12)}{(x-6)^2(x+6)}=\frac{3x-42}{(x-6)^2(x+6)}$

④ $\frac{y-5}{y+1}+\frac{y-1}{y+5}-\frac{25}{y^2+6y+5}$

$=\frac{(y-5)}{y+1}+\frac{(y-1)}{y+5}-\frac{25}{(y+5)(y+1)}$ — شكلهما فرق مربعين نرجعها الى اصلها

$=\frac{(y-5)(y+5)+(y-1)(y+1)-25}{(y+5)(y+1)}$

$=\frac{y^2-25+y^2-1-25}{(y+5)(y+1)}$

$=\frac{2y^2-51}{(y+5)(y+1)}$

⑤ $\frac{y^2-1}{1-y^3}+\frac{1+y}{1+2y+y^2}$

$=\frac{(y-1)(y+1)}{(1-y)(1+y+y^2)}+\frac{1+y}{(1+y)^2}$ — $(1-y)=-(y-1)$

$=\frac{(y-1)(y+1)}{-(y-1)(1+y+y^2)}+\frac{1}{(1+y)}$

$=\frac{-(y+1)}{(1+2y+y^2)}+\frac{1}{(1+y)}$

$=\frac{-(y+1)(1+y)+(1+2y+y^2)}{(1+2y+y^2)(1+y)}$

$=\frac{-y^2-2y-1+1+y+y^2}{(1+2y+y^2)(1+y)}=\frac{-y}{(1+2y+y^2)(1+y)}$

H.W : أكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صوره

① $\frac{3}{z-1}+\frac{2}{z+3}+\frac{8}{z^2+2z-3}$ Ans $=\frac{5}{z-1}$	② $\frac{y^2-y}{y^3-1}-\frac{1}{y^2+y+1}$ Ans $=\frac{y-1}{y^2+y+1}$
③ $\frac{z+3}{z+5}-\frac{z-5}{z-3}+\frac{1}{z^2+2z-15}$ Ans $=\frac{17}{z^2+2z-15}$	④ $\frac{4x^2-1}{4x^2-4x+1}+1$ Ans $=\frac{4x}{2x-1}$

مسائل حياتية

❶ **باقات الزهور:** اشترى حسن مجموعة من باقات الزهور بمبلغ $6 - x - x^2$ دينار. فكانت كلفة باقة الزهور الواحدة علية $6 - 2x$ دينار. اكتب نسبة ثمن الباقة الواحدة الى ثمن الباقات الكلية بأبسط صورة؟

ملاحظة: معنى النسبة هو تكوين كسر من بسط ومقام حيث تكون قيمة البسط قبل كلمة الى والمقام بعدها

SOL:

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور الواحده}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x-6}{x^2-x-6} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

❷ **مكتبة:** اذا كان المقدار الجبري $x^2 - 4$ يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة والمقدار الجبري $x^2 + x - 6$ يمثل عدد الكتب الادبية فيها. اكتب نسبة الكتب العلمية الى الكتب الادبية بأبسط صورة؟

ملاحظة: لو كان المطلوب هو نسبة عدد الكتب الادبية الى الكتب العلمية لكان الكسر بهذه الصيغة $\frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{\text{الكتب الادبية}}{\text{الكتب العلمية}}$ وتكمل الحل للنهاية

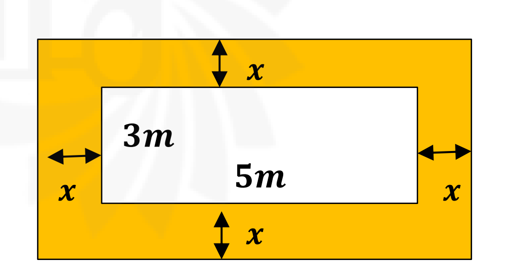
SOL:

$$\frac{\text{الكتب العلمية}}{\text{الكتب الادبية}} = \frac{x^2-4}{x^2+x-6} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+3)(x-2)} = \frac{x+2}{x+3}$$

❸ **هندسة:** مستطيل أبعاده $5, 3$ امتار. وسع الى مستطيل اكبر وذلك بإحاطته بممر عرضه x متر. اكتب المقدار الجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع الى طول بعد التوسيع ونسبة عرضه قبل التوسيع الى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة؟

SOL:

ابعاد المستطيل قبل التوسيع: الطول=5 متر والعرض=3 متر ۞ ابعاد المستطيل بعد التوسيع: الطول=$5 + 2x$ متر والعرض=$3 + 2x$ متر



$$\frac{\text{الطول قبل التوسيع}}{\text{الطول بعد التوسيع}} + \frac{\text{العرض قبل التوسيع}}{\text{العرض بعد التوسيع}} = \frac{5}{5+2x} + \frac{3}{3+2x}$$

$$\frac{5(3+2x)+3(5+2x)}{(5+2x)(3+2x)} = \frac{15+10x+15+6x}{(5+2x)(3+2x)}$$

$$= \frac{30+16x}{(5+2x)(3+2x)} = \frac{2(15+8x)}{(5+2x)(3+2x)}$$

❹ **العاب نارية**: المقدار الجبري $20+15t-5t^2$ يمثل ارتفاع بالأمتار لقذيفة العاب نارية من سطح بناية ارتفاعها 20 متراً اذ t تمثل زمن وصول القذيفة بالثواني الى الهدف . والمقدار الجبري $4+19t-5t^2$ يمثل ارتفاع قذيفة اخرى اطلقت من سطح بناية ارتفاعها 4 متراً

اكتب نسبة ارتفاع القذيفة الاولى الى القذيفة الثانية؟

SOL:

$$\frac{\text{ارتفاع القذيفة الاولى}}{\text{ارتفاع القذيفة الثانية}}=\frac{20+15t-5t^2}{4+19t-5t^2}$$

$$=\frac{5(4+3t-t^2)}{4+19t-5t^2}=\frac{5(1+t)(4-t)}{(1+5t)(4-t)}=\frac{5(1+t)}{(1+5t)}$$

فــكر



اولاً تحدِ بسط المقدار الجبري الاتي الى ابسط صورة

$$\frac{y^2-5}{2y^3-16}\div\frac{y-\sqrt5}{2y^2+4y+8}$$

Sol:

$$=\frac{y^2-5}{2y^3-16}\times\frac{2y^2+4y+8}{y-\sqrt5}$$

نسحب عامل مشترك ثم نحلل فرق مكعبين

$$=\frac{(y-\sqrt5)(y+\sqrt5)}{2(y-2)(y^2+2y+4)}\times\frac{2(y^2+2y+4)}{y-\sqrt5}=\frac{y+\sqrt5}{y-2}$$



ثانياً اصحح الخطأ بسطت سماح المقدار وكتبته بأبسط صوره كما يلي

$$\frac{z^2-z-30}{5+z}\times\frac{2z+12}{z^2-36}=1$$ اكتشف خطأ سماح وصححه

SOL:

نبسط المقدار اولاً ثم نحدد الاخطاء

$$\frac{z^2-z-30}{5+z}\times\frac{2z+12}{z^2-36}$$

$$=\frac{(z-6)(z+5)}{5+z}\times\frac{2(z+6)}{(z-6)(z+6)}=2$$



خطأ سماح هو في كتابة الناتج حيث كتبته 1 والصحيح 2



ثالثاً حس عددي: ما ناتج جمع المقدارين بدون استعمال الورقة والقلم ؟ وضح ذلك

$$\frac{5}{x^2-49}+\frac{-4}{(x-7)(x+7)}$$

جواب: يكون الناتج $\frac{1}{(x-7)(x+7)}$

لأن المقامات متساوية حيث المقام الاول يحلل فرق بين مربعين ويصبح مثل المقام الثاني . فنأخذ احدهما

وناتج جمع البسوط هو $5-4=1$



رابعاً اكتب: قيمة المقدار بأبسط صورة

SOL:

$$\frac{z^2+z-6}{2z^2+2z-12}\div\frac{z^2-16}{2z+8}$$

$$=\frac{z^2+z-6}{2z^2+2z-12}\times\frac{2z+8}{z^2-16}$$

$$=\frac{z^2+z-6}{2(z^2+z-6)}\times\frac{2(z+4)}{(z-4)(z+4)}$$

$$=\frac{1}{z-4}$$





Multiple Choice الاختيار من متعدد

الدرس [2-6] تبسيط المقادير الجبرية النسبية

Simplifying Rational Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة:

1. $\frac{x+3}{4x} \times \frac{4x-12}{x^2-9}$ a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{x}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ ✓d) $\frac{1}{x}$

2. $\frac{y+2}{y^2+2y+4} \times \frac{y^3-8}{y^2-4}$ a) $\frac{1}{y-2}$ ✓b) 1 c) $\frac{1}{y+2}$ d) -1

3. $\frac{z^2-2z-15}{9+3z} \times \frac{5}{z^2-25}$ a) $\frac{5}{z+5}$ b) $\frac{3}{5(z+5)}$ ✓c) $\frac{5}{3(z+5)}$ d) $\frac{3}{z+5}$

4. $\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35} \div \frac{x-7}{4x^2-25}$ a) x -7 b) 2x - 5 c) x + 7 ✓d) 2x + 5

5. $\frac{1-z^3}{1+z+z^2} \div \frac{(1-z)^2}{1-z^2}$ a) 1 - z ✓b) 1 + z c) $1+z+z^2$ dc) $1-z+z^2$

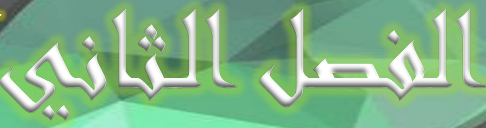
اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

6. $\frac{2y^2+1}{y^3-1} - \frac{y}{y^2+y+1}$ a) $\frac{y}{y+1}$ b) $\frac{1}{y+1}$ ✓c) $\frac{1}{y-1}$ d) $\frac{y}{y-1}$

7. $\frac{5-4z^2}{8z^3+1} + \frac{2z-1}{4z^2-2z+1}$ a) $\frac{2z-1}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$ b) $\frac{2z+1}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$ c) $\frac{2}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$ ✓d) $\frac{4}{(2z+1)(4z^2-2z+1)}$

8. $\frac{3}{x-5} - \frac{2}{5-x} - \frac{130+24x+5x^2}{x^3-125}$ a) $\frac{2x}{(x^2+5x+25)}$ b) $\frac{-2x}{(x^2+5x+25)}$ ✓c) $\frac{1}{(x^2+5x+25)}$ d) $\frac{8}{x^2+5x+25}$

9. $\frac{3y+1}{y+4} - \frac{y-4}{3y-1} - \frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}$ ✓a) $\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$ b) $\frac{3}{(y+4)(3y-1)}$ c) $\frac{-3}{(y+4)(3y-1)}$ d) $\frac{-5}{(y+4)(3y-1)}$

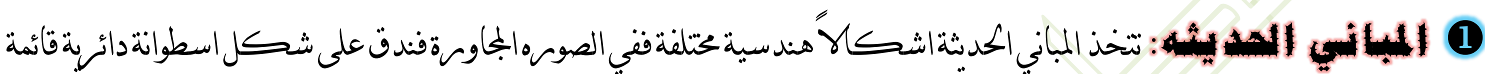





الدرس (2 – 7)

خطة حل المسألة (الخطوات الاربع)

في هذه الدرس نستخدم اربع خطوات للحل وهي أفهم، خطط، حل، تحقق



مثال حل المسائل التالية باستراتيجية (الخطوات الاربع)

❶ **المباني الحديثه:** تتخذ المباني الحديثة اشكالاً هندسية مختلفة ففي الصوره المجاورة فندق على شكل اسطوانة دائرية قائمة مغلفة من جوانبها بالزجاج . اذا كان نصف قطر قاعدة المبنى $x - 8$ متر وارتفاعه $x + 12$ متر .



ما المساحة الجانبية للفندق؟

افهم ما معطيات المسألة؟ مبنى الفندق على شكل اسطوانة .

نصف قطر قاعدتها $x - 8$ متر و ارتفاعه $x + 12$ متر

ما المطلوب من المسألة؟ ايجاد المساحة الجانبية للفندق

خطط بما أن بناية الفندق مشابهه للشكل الاسطواني الدائري القائم . لذا نطبق قانون المساحة الجانبية

وهي المساحة الجانبية= 2 × النسبة الثابته × نصف قطر القاعدة × الارتفاع .... $LA = 2\pi(r)(h)$




حل نصف قطر القاعدة= $x - 8$ متر و الارتفاع= $x + 12$ .... نعوضهما بالقانون

$$LA = 2\pi(r)(h)$$
$$= 2\pi(x-8)(x+12)$$

نستخدم خاصية التوزيع في ضرب المقادير الجبرية

نوزع خارج القوس على داخله

$$= 2\pi(x^2 + 4x - 96)$$
$$= 2\pi x^2 + 8\pi x - \pi 192$$

المساحة الجانبية للفندق بالأمتار المربعة

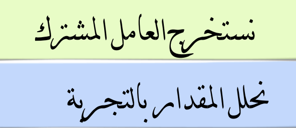
تحقق استعمل تحليل المقادير الجبرية للتحقق من صحة الحل .

نحلل الى اصله

$$LA = 2\pi x^2 + 8\pi x - \pi 192$$
$$= 2\pi(x^2 + 4x - 96)$$
$$= 2\pi(x-8)(x+12)$$

نستخرج العامل المشترك

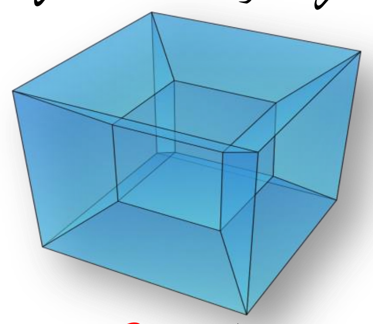
نحلل المقدار بالتجربة




من خلال القانون يدل على ان $r = x - 8$ و $h = x - 8$ اذن الحل صحيح

❷ **هندسة** : صندوق مكعب الشكل طول ضلعه x **سنتمتر** . وضعه داخله مكعب اصغر منه طوله ضلعه 3 **سنتمتر**

حلل المقدار الجبري الذي يمثل الفرق بين حجمي المكعبين ؟



افهم ما معطيات المسألة ؟ صندوق مكعب الشكل طول ضلعه x **سنتمتر** وضعه داخله مكعب اصغر منه طوله ضلعه 3 **سنتمتر**

ما المطلوب من المسألة ؟ تحليل المقدار الذي يمثل الفرق بين حجمي المكعبين .





خطط بما ان شكل الصندوق ان مكعب والمطلوب هو ايجاد الحجم لهما . لذا نطبق قانون الحجم

حجم المكعب = $(\text{طول الضلع})^3$ . . . . $v = (L)^3$.

ثم نجد الفرق بين المكعب الاول والثاني $V = v_1 - v_2$

حل طول ضلع المكعب الاول = x **سنتمتر** و طول ضلع المكعب الثاني = 3 **سنتمتر** . . . . . نعوضهما بالقانون

$$V = (x)^3 - (3)^3$$
$$= x^3 - 27$$
$$= (x-3)(x^2+3x+9)$$

نحلل المقدار فرق بين مكعبين

ناتج الفرق بين حجوم المكعبين بالسنتمترات المكعبة



تحقق نستخدم خاصية ضرب المقادير الجبرية بالتوزيع .



$$V = (x-3)(x^2+3x+9)$$

$$V = x^3 + 3x^2 + 9x - 3x^2 - 9x - 27$$

نختصر الحدود المتشابهة

$$= x^3 - 27$$

من خلال القانون يكون طول ضلع المكعب الاول = x **سنتمتر** و طول ضلع المكعب الثاني = 3 **سنتمتر** . اذن الحل صحيح



❸ كرة الثلج: هي كرة شفافه تصنع من الزجاج تطوي على منظر طبيعي وتحتوي على الماء ويستفاد من الماء بوصفه وسطاً لسقوط الثلج . اذا كان نصف قطر كرة الثلج $3 - y$ سنتمتر ، فما حجم الكرة؟



افهم ما معطيات المسألة؟ كرة من الزجاج نصف قطرها $3 - y$ سنتمتر

ما المطلوب من المسألة؟ حجم الكره الزجاجيه .

خطط بما ان الشكل كروي والمطلوب هو حجم الكرة . لذا سوف نطبق قانون حجم الكرة .

حجم الكرة $= \frac{4}{3} \times$ النسبة الثابتة $\times$ $($نصف القطر$)^3$ .... $v = \frac{4}{3}\pi(r)^3$

حل نصف القطر $= 3 - y$ سنتمتر .... نعوضه بالقانون .

$$v = \frac{4}{3}\pi(r)^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi(y-3)^3 = \frac{4}{3}\pi(y-3)(y-3)^2$$

نجزئ التكعيب الى قوسين . ثم نفتح القوس الثاني بالمربع الكامل

$$= \frac{4}{3}\pi(y-3)(y^2-6y+9)$$

ثم نضرب قوس من حدين في ثلاثة حدود

$$= \frac{4}{3}\pi(y^3-6y^2+9y-3y^2+18y-27)$$

$$= \frac{4}{3}\pi(y^3-9y^2+27y-27)$$

ندخل خارج القوس على داخله

$$= \frac{4}{3}\pi y^3 - 12\pi y^2 + 36\pi y - 36\pi$$

يمثل حجم الكره بالسنتمترات المكعبة

تحقق نحلل المقدار بالتجميع لانه متكون من اربع حدود



$$v = \frac{4}{3}\pi y^3 - 12\pi y^2 + 36\pi y - 36\pi$$

$$= \frac{4}{3}\pi(y^3-9y^2+27y-27) = \frac{4}{3}\pi[(y^3-27)+(-9y^2+27y)]$$

$$= \frac{4}{3}\pi[(y^3-27)-9y(y-3)] = \frac{4}{3}\pi[(y-3)(y^2+3y+9)-9y(y-3)]$$

$$= \frac{4}{3}\pi[(y-3)((y^2+3y+9)-9y)] = \frac{4}{3}\pi[(y-3)(y^2-6y+9)]$$

$$= \frac{4}{3}\pi[(y-3)(y-3)^2] = \frac{4}{3}\pi[(y-3)^3]$$

من خلال القانون يكون نصف القطر $3 - y$ = سنتمتر اذن الحل صحيح

4 **دب الباندا:** موطن دب الباندا الطبيعي هو سلسلة جبال وسط الصين . ويحتاج الى منطقة واسعة في حديقة الحيوانات حتى يتكيف للعيش، وسعت المنطقة المخصصة للباندا في احدى حدائق الحيوان بمقدار 6 امتار الى كل من الطول وعرض المنطقة فأصبح طول المنطقة $8 + x$ متر والعرض $4 + x$ متر . ما مساحة المنطقة المخصصة للباندا قبل التوسعة؟

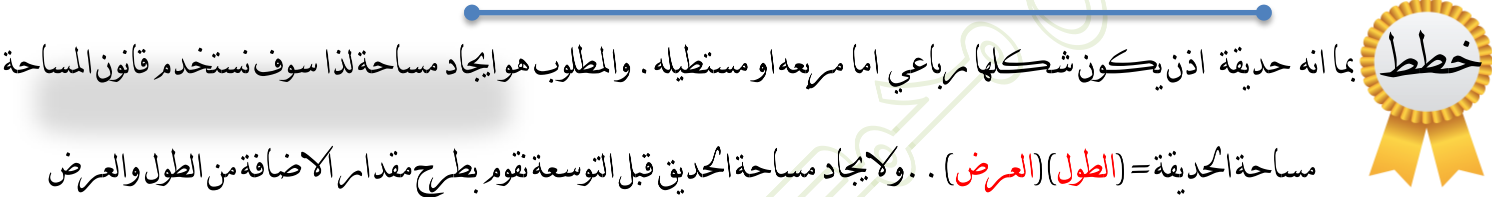


افهم ما معطيات المسألة؟ حديقة وسعت بمقدار 6 امتار للعرض والطول

فأصبح طول المنطقة $8 + x$ متر والعرض $4 + x$ متر

ما المطلوب من المسألة؟ ما مساحة المنطقة المخصصة للباندا قبل التوسعة .

خطط بما انه حديقة اذن يكون شكلها رباعي اما مربعه او مستطيله . والمطلوب هو ايجاد مساحة لذا سوف نستخدم قانون المساحة



مساحة الحديقة = (الطول)(العرض) . . ولايجاد مساحة الحديق قبل التوسعة نقوم بطرح مقدار الاضافة من الطول والعرض

الطول قبل التوسعه = الطول بعد التوسعه – مقدار التوسعه = $x + 8 - 6 = x + 2$ متر

العرض قبل التوسعه = العرض بعد التوسعه – مقدار التوسعه = $x + 4 - 6 = x - 2$ متر





حل نعوض بالقانون عن الطول $x + 2$ متر والعرض $x - 2$ متر

المساحة قبل التوسعه $= (x + 2)(x - 2)$

$= x^2 - 4$

القوسين عباره عن فرق بين مربعين

تمثل المساحة قبل التوسعة بالأمتار



تحقق نحلل المقدار بالفرق بين مربعين . . . . . .

المساحة قبل التوسعه $= x^2 - 4$

$= (x + 2)(x - 2)$

من خلال القانون يكون الطول $= x + 2$ متر والعرض $= x - 2$ متر . اذن الحل صحيح



5 **مدينة الألعاب**: بعض الالعاب في مدينة الالعاب تشغل مساحة اكبر من المساحة التي تشغلها وهي متوقفه . فلعبة الارجوحه تشغل مساحة دائرية قطرها x متر عند الدوران . وعند توقفها فان قطر المساحة التي تشغلها يقل بمقدار 8 امتار . اكتب الفرق بين مساحتي التوقف والدوران للارجوحة ثم حلله ؟



افهم ما معطيات المسألة ؟ ارجوحه تشغل مساحة دائرية قطرها x متر عند الدوران وعند توقفها فان قطر المساحة التي تشغلها يقل بمقدار 8 امتار

ما المطلوب من المسألة ؟ الفرق بين مساحتي التوقف والدوران للارجوحة ثم حلله .

خطط بما ان شكل الارجوحة دائري والمطلوب هو ايجاد مساحة الدائرة لذا نطبق قانون مساحة الدائرة

مساحة الدائرة = النسبة الثابته × (نصف القطر)^2 .... $A=\pi r^2$

والمطلوب هو ايجاد الفرق بين مساحة التوقف والدوران ......$A=A_1-A_2$, حيث A_1 مساحة الدوران و A_2 مساحة التوقف



حل قطر الدوران= x متر ونصف قطر الدوران $\frac{x}{2}$ متر ، قطر التوقف= $x-8$ متر ونصف قطر التوقف $\frac{x-8}{2}$ متر

$$A=A_1-A_2=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{x-8}{2}\right)^2$$

بعد اخراج العامل المشترك نحللها فرق بين مربعين

$$=\pi\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x-8}{2}\right)^2\right]$$

$$=\pi\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{x-8}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{x-8}{2}\right)\right]$$

يمثل الفرق بين مساحة التوقف والدوران بالمتر المربع

$$=\pi\left(\frac{x^2}{4}\right)-\pi\left(\frac{x^2-16x+64}{4}\right)=\pi\left(\frac{x^2-x^2+16x-64}{4}\right)=\pi\left(\frac{16x-64}{4}\right)=4\pi(x-4)$$



تحقق نستعمل خاصية ضرب قوسين جبريين بالتوزيع

$$A=\pi\left[\left(\frac{x}{2}-\frac{x-8}{2}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{x-8}{2}\right)\right]$$

$$A=\pi\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x-8}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x-8}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{x-8}{2}\right)^2\right]$$

$$=\pi\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2-\left(\frac{x-8}{2}\right)^2\right]=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{x-8}{2}\right)^2$$

من خلال القانون يكون . نصف قطر الدوران= $\frac{x}{2}$ متر ونصف قطر التوقف= $\frac{x-8}{2}$ متر . اذن الحل صحيح

الفصل الثالث

المعادلات

1. حل المعادلات الخطية
2. حل المعادلات التربيعية
3. حل المعادلات بالتجربة
4. حل المعادلات بالمربع الكامل
5. حل المعادلات بالدستور
6. حل المعادلات الكسرية
7. خطة حل المسألة







الدرس (3 − 1) حل نظام من معادلتين خطيتين من الدرجة الاولى بمتغيرين

هناك ثلاث طرق لحل معادلتين من الدرجة الاولى بمتغيرين

اولاً: حل المعادلات بطريقة الحذف

تتلخص هذه الطريقة بحذف احد المتغيرين وايجاد قيمة المتغير الاخر وتعويضها باحدى المعادلتين لايجاد قيمة المتغير المحذوف .

خطوات الحل

1. نبسط المعادلتين من خلال التخلص من الاقواس والكسور ان وجدت .
2. نقرر ان نحذف المتغير الذي له اصغر معامل .
3. نجعل معامل المتغير الذي نريد حذفه متساوي في المعادلتين وبعكس الاشارة (يعني ان نجعل اشارة المتغير الذي نريد حذفه مختلفة في المعادلتين) .
4. نجمع المعادلتين بحذف المتغير الذي قررنا حذفه وايجاد قيمة المتغير الثاني .
5. ثم نعوض قيمة المتغير الثاني في احدى المعادلتين لايجاد قيمة المتغير الاول (المحذوف) ونكتب مجموعة الحل $S = \{(x, y)\}$.

مثال 1 جد مجموعة الحل للنظام بأستعمال طريقة الحذف .

اذا كانت اشارة المتغير الذي نريد حذفه متشابه في المعادلتين نضرب احدى المعادلتين في -1 لكي نحذف المتغير

في هذا المثال مباشرةً نجمع المعادلتين لأنه يوجد متغير معاملاته متساوية وعكس الاشارة

❶ $2x + y = 1$

$x - y = 8$

Sol

$2x + y = 1$ ....①

$x - y = 8$ ....② بالجمع

$3x = 9$

$\frac{3x}{3} = \frac{9}{3}$ نقسم الطرفين على 3

$x = 3$

نعوض قيمة $x = 3$ في معادلة رقم ② لإيجاد قيمة y

$x - y = 8$ ....②

$3 - y = 8$

$-y = 8 - 3$

$-y = 5 \Rightarrow (-1)y = (-1)5$ نضرب الطرفين في (-1)

$y = -5$

$\therefore S = \{(3, -5)\}$

اعداد التربويين مصطفى محمد ▸ صفاء الكلابي

❷ $x + 2y = 5$
$3x - y = 1$

نرقم المعادلتين ثم نختار المتغير الذي نريد حذفه
نضرب المعادلة ②في $(\times 2)$ لكي يتساوى معامل المتغير y

Sol
$x + 2y = 5$......①
$3x - y = 1$......② $(\times 2)$

بعد مساواة معامل المتغير y وجعل اشارة المتغير الذي نريد حذفه في المعادلتين مختلفة ثم نقوم بجمع المعادلتين

$x + 2y = 5$
$6x - 2y = 2$
بالجمع

$7x = 7$
تقسم الطرفين على 7

$\frac{7x}{7} = \frac{7}{7} \Rightarrow x = 1$

نعوض قيمة $x = 1$ في معادلة رقم ① لإيجاد قيمة y

$x + 2y = 5$.................①
$1 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 5 - 1$
$2y = 4$
$\frac{2y}{2} = \frac{4}{2} \Rightarrow y = 2$
تقسم الطرفين على 2

$\therefore S = \{(1, 2)\}$

---

❸ $x - 3y = 6$
$2x - 4y = 24$

Sol
$x - 3y = 6$...........① $(\times -2)$
$2x - 4y = 24$ ....②

نضرب المعادلة ① في -2 لكي يتساوى معامل x وعكس الاشارة

$-2x + 6y = -12$
$2x - 4y = 24$
بالجمع

$6y - 4y = 2y$

$-2x + 2x = 0$

$2y = 12$
$\frac{2y}{2} = \frac{12}{2}$
تقسم الطرفين على 2

$y = 6$

نعوض قيمة $y = 6$ في معادلة رقم ① لإيجاد قيمة x

$x - 3y = 6$.......①
$x - 3(6) = 6$
$x - 18 = 6$
$x = 6 + 18 \Rightarrow x = 24$
$\therefore S = \{(24, 6)\}$

الزوج المرتب (x, y) في مجموعة الحل يتكون من مسقطين المسقط الاول هو x والثاني y ويجب الترتيب\لا يمكن وضع احدهما بدل الاخر



④ $3y-2x-7=0$

$y+3x+5=0$

نبسط المعادلتين بجعل المتغيرات بطرف والثوابت بالطرف الاخر



Sol $3y-2x=7$ ....①

$y+3x=-5$ ....② $(\times -3)$

نضرب المعادلة ② في -3 لكي يتساوى معامل y وعكس الاشارة

$3y-2x=7$

$-3y-9x=+15$ بالجمع

$3y-3y=0$

$-2x-9x=-11x$

$-11x=22$

نقسم الطرفين على -11

$\frac{-11x}{-11}=\frac{22}{-11}$

$x=-2$

نعوض قيمة $x=-2$ في معادلة رقم ② لإيجاد قيمة y

$y+3x=-5$ ....②



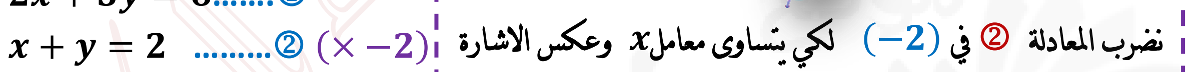
$y+3(-2)=-5$

$y-6=-5$

$y=-5+6 \Rightarrow y=1$

$\therefore S=\{(-2,1)\}$

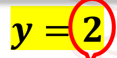




⑤ $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ ....① $(\times 6)$

$x+y=2$ ....②

في هذا المثال نتخلص من الكسور بضرب المعادلة ① بال LCM للمقام والذي يساوي 6



Sol $6\left(\frac{x}{3}\right)+6\left(\frac{y}{2}\right)=6(1)$

$2x+3y=6$ ....①

$x+y=2$ ....② $(\times -2)$

نضرب المعادلة ② في (-2) لكي يتساوى معامل x وعكس الاشارة

$2x+3y=6$

$-2x-2y=-4$ بالجمع

$y=2$

$2x-2x=0$

$3y-2y=y$

نعوض قيمة $y=2$ في معادلة رقم ② لإيجاد قيمة x

$x+y=2$ ....②

$x+2=2$

$x=2-2$

$x=0$

$\therefore S=\{(0,2)\}$



⑥ $3x + 4y = 10$
$2x + 3y = 7$

اذا كانت معاملات المتغيرين اكثر من واحد وغير متساويين نحدد المتغير الذي نريد حذفه ويفضل المتغير الذي معاملاته صغيرة .
هنا نختار المتغير x
نضرب المعادلة ① في $(\times -2)$ ضرب عكسي للمعاملات
نضرب المعادلة ② في $(\times 3)$

Sol $3x + 4y = 10$..........① $(\times -2)$
$2x + 3y = 7$..........② $(\times 3)$

$-6x - 8y = -20$
$6x + 9y = 21$ بالجمع

$-6x + 6x = 0$
$-8y + 9y = y$

$y = 1$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة رقم ② لإيجاد قيمة x

$2x + 3y = 7$..........②
$2x + 3(1) = 7$
$2x + 3 = 7$
$2x = 7 - 3$
$2x = 4 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ نقسم الطرفين على 2
$x = 2$

$\therefore S = \{(2, 1)\}$

---

⑦ $3x - 4y = 12$
$5x + 2y = -6$

في هذا المثال نساوي معامل y في المعادلتين بضرب المعادلة ② في $(\times 2)$ فقط

Sol $3x - 4y = 12$..........①
$5x + 2y = -6$..........② $(\times 2)$

$3x - 4y = 12$
$10x + 4y = -12$ بالجمع

اذا كانت اشارة المتغير الذي نريد حذفه مختلفة في المعادلتين لا نحتاج ان نضرب في عدد سالب

$3x + 10x = 13x$
$-4y + 4y = 0$

$13x = 0$
$\frac{13x}{13} = \frac{0}{13}$ نقسم الطرفين على 13
$x = 0$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة رقم ② لإيجاد قيمة y

$5x + 2y = -6$.......②
$5(0) + 2y = -6$
$0 + 2y = -6$
$2y = -6$
$\frac{2y}{2} = \frac{-6}{2}$ نقسم الطرفين على 2
$y = -3$

$\therefore S = \{(0, -3)\}$

⑧ $3x = 22 - 4y$
$4y = 3x - 14$

نبسط المعادلتين بوضع المتغيرات بطرف والثوابت بالطرف الاخر. مع ملاحظة تغير الاشارة

Sol
$3x = 22 - 4y$..............①
$4y = 3x - 14$..............②

$3x - 3x = 0$

$4y + 4y = 8y$

$3x + 4y = 22$
$-3x + 4y = -14$ بالجمع

$8y = 8$

تقسم الطرفين على 8

$\frac{8y}{8} = \frac{8}{8}$

$y = 1$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة رقم ① لإيجاد قيمة x

$3x + 4y = 22$..............①
$3x + 4(1) = 22$
$3x + 4 = 22$
$3x = 22 - 4$
$3x = 18$
$\frac{3x}{3} = \frac{{}^{6}18}{3}$
$x = 6$

$\therefore S = \{(6, 1)\}$



⑨ $5x - 3y = 6$
$2x + 5y = -10$

Sol
$5x - 3y = 6$..............① $(\times 5)$
$2x + 5y = -10$.........② $(\times 3)$

$25x - 15y = 30$
$6x + 15y = -30$ بالجمع

$31x = 0$
$\frac{31x}{31} = \frac{0}{31} \Rightarrow x = 0$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة رقم ② لإيجاد قيمة y

$2x + 5y = -10$.........②
$2(0) + 5y = -10$
$0 + 5y = -10 \Rightarrow 5y = -10$
$\frac{5y}{5} = \frac{{}^{-2}-10}{5} \Rightarrow y = -2$

$\therefore S = \{(0, -2)\}$

H.W جد مجموعة الحل باستعمال طريقة الحذف لكل مما ياتي .

❶ $4x - 2y = -4$, $x + y = 6$ → $S = \left\{\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)\right\}$

❷ $y - x - 8 = 0$, $3x - 2y + 6 = 0$ → $S = \{(10, 18)\}$

❸ $2x + 3y = 1$, $3x - 2y = 0$ → $S = \left\{\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)\right\}$

ثانياً: حل المعادلات بطريقة التعويض

خطوات الحل

❶ نبسط المعادلتين بجعل الثوابت في طرف والمتغيرات في طرف

❷ نكون معادلة رقم ③ من معادلة رقم ① او من معادلة رقم ②

❸ نجعل معادلة رقم ③ اما بالصيغة $x = \cdots\cdots$ او بالصيغة $y = \cdots\cdots$

❹ * نعوض معادلة رقم ③ في معادلة رقم ① اذا كانت معادلة رقم ③ مكونة من معادلة رقم ②

* نعوض معادلة رقم ③ في معادلة رقم ② اذا كانت معادلة رقم ③ مكونة من معادلة رقم ①

❺ عند ايجاد قيمة x نعوض قيمة x في معادلة رقم ③ لايجاد قيمة y

عند ايجاد قيمة y نعوض قيمة y في معادلة رقم ③ لايجاد قيمة x ، الملاحظة موضحة حسب المخطط التالي

❺ بعد ايجاد قيمة x وقيمة y نكتب مجموعة الحل بالشكل التالي $S = \{(x, y)\}$

من معادلة ① ← نكون معادلة ③ ← نعوض في معادلة ② لإيجاد قيمة المتغير الاول ← نعوض في معادلة ③ لإيجاد قيمة المتغير الثاني

من معادلة ② ← نكون معادلة ③ ← نعوض في معادلة ① لإيجاد قيمة المتغير الاول ← نعوض في معادلة ③ لإيجاد قيمة المتغير الثاني

WHAT PART OF

$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 4\pi k\rho$

$\nabla \cdot B = 0$

$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\nabla \times B = \frac{4\pi k}{c^2} J + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t}$

Didn't You Understand?





مثال 2 جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض .

❶ $x - 2y = 11$
$2x - 3y = 18$

Sol

$x - 2y = 11$ ....①
$2x - 3y = 18$ ....②

نكون معادلة ③ من معادلة ①

$x = 11 + 2y$ ....③
$2x - 3y = 18$ ....②

نعوض معادلة ③ في معادلة ②

$2(11 + 2y) - 3y = 18$
$22 + 4y - 3y = 18$
$y = 18 - 22$
$y = -4$

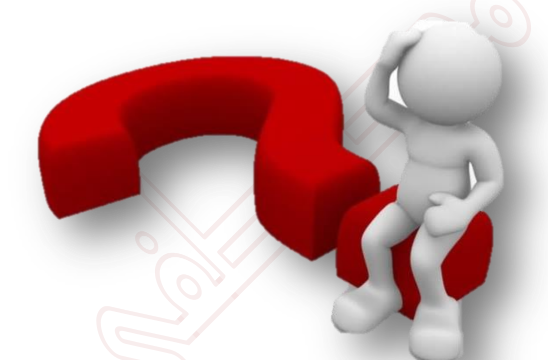
$x = 11 + 2y$ ....③

نعوض قيمة $y = -4$ في معادلة ③ لإيجاد قيمة x

$x = 11 + 2(-4)$
$x = 11 - 8$
$x = 3$

$\therefore S = \{(3, -4)\}$





❷ $y = 4x$
$y = x + 6$

في هذا المثال لا نحتاج الى ايجاد معادلة ③ لأنه هنا المتغير y بدلالة x مباشرة نعوض معادلة ① في معادلة ② لإيجاد قيمة x

Sol

$y = 4x$ ....①
$y = x + 6$ ....②

نعوض معادلة ① في معادلة ② لإيجاد قيمة x

$4x = x + 6$
$4x - x = 6$
$3x = 6$

نقسم الطرفين على 3

$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$
$x = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في معادلة رقم ① لإيجاد قيمة y

$y = 4x$ ....①
$y = 4(2)$
$y = 8$

$\therefore S = \{(2, 8)\}$

❸ $y - 5x = 10$
$y - 3x = 8$

عند تكوين معادلة رقم ③ يشترط ان يكون المتغير بالصيغة $y = \cdots$ او $x = \cdots$ معامله واحد والثوابت والمتغيرات في الطرف الثاني

Sol
$y - 5x = 10$ ……①
$y - 3x = 8$ ……②

$y = 10 + 5x$ ……③ — نكون معادلة ③ من معادلة ①

$y - 3x = 8$ ……②

نعوض معادلة ③ في معادلة ②

$10 + 5x - 3x = 8$
$2x = 8 - 10$
$2x = -2$
$\frac{2x}{2} = \frac{-2}{2}$ — نقسم الطرفين على 2
$x = -1$

$y = 10 + 5x$ ……③ — نعوض قيمة $x = -1$ في معادلة ③ لإيجاد قيمة y
$y = 10 + 5(-1)$
$y = 10 - 5$
$y = 5$

$\therefore S = \{(-1, 5)\}$

❹ $x + 2y - 6 = 0$
$3x - 4y - 28 = 0$

Sol
$x + 2y = 6$ ……①
$3x - 4y = 28$ ……②

$x = 6 - 2y$ ……③ — نكون معادلة ③ من معادلة ①

$3x - 4y = 28$ ……②

نعوض معادلة ③ في معادلة ②

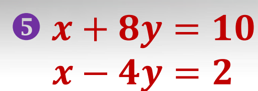
$3(6 - 2y) - 4y = 28$
$18 - 6y - 4y = 28$
$18 - 10y = 28$
$-10y = 28 - 18$
$-10y = 10$
$\frac{-10y}{-10} = \frac{10}{-10}$ — نقسم الطرفين على -10
$y = -1$





$x = 6 - 2y$ ……③ — نعوض قيمة $y = -1$ في معادلة ③ لإيجاد قيمة x
$x = 6 - 2(-1)$
$x = 6 + 2$
$x = 8$

$\therefore S = \{(8, -1)\}$



❺ $x + 8y = 10$
$x - 4y = 2$

Sol $x + 8y = 10$ .... ①
$x - 4y = 2$ .... ②

نكون معادلة ③ من معادلة ②

$x = 2 + 4y$ .... ③

نعوض معادلة ③ في معادلة ①

$x + 8y = 10$ .... ①
$2 + 4y + 8y = 10$
$12y = 10 - 2$
$12y = 8$
$\frac{12y}{12} = \frac{8}{12} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

نعوض قيمة $y = \frac{2}{3}$ في معادلة ③ لإيجاد قيمة x

$x = 2 + 4y$ .... ③
$x = 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x = 2 + \frac{8}{3}$
$x = \frac{6}{3} + \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3}$

$\therefore S = \{(\frac{14}{3}, \frac{2}{3})\}$

❻ $3x + 4y = 26$
$5x - 2y = 0$

Sol $3x + 4y = 26$ .... ①
$5x - 2y = 0$ .... ②

تقسم الطرفين على 3

$3x = 26 - 4y \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{26-4y}{3}$

نكون معادلة ③ من معادلة ①

$x = \frac{26-4y}{3}$ .... ③

نعوض معادلة ③ في معادلة ②

$5x - 2y = 0$ .... ②
$5\left(\frac{26-4y}{3}\right) - 2y = 0$

نضرب كل حدود المعادلة في 3 للتخلص من الكسر

$3.\left(5\left(\frac{26-4y}{3}\right)\right) - 3.(2y) = 3(0)$
$5(26 - 4y) - 6y = 0 \Rightarrow 130 - 20y - 6y = 0 \Rightarrow -26y = -130$
$\frac{-26y}{-26} = \frac{-130}{-26} \Rightarrow y = 5$

نعوض قيمة $y = 5$ في معادلة ③ لإيجاد قيمة x

$x = \frac{26-4y}{3}$ .... ③
$x = \frac{26-4(5)}{3} \Rightarrow x = \frac{26-20}{3}$
$x = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$

$\therefore S = \{(2, 5)\}$

❼ $2x+3y=1$
$3x-2y=0$

Sol $2x+3y=1$ ....①
$3x-2y=0$ ....②

نكون معادلة ③ من معادلة ①

$2x=1-3y \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{1-3y}{2}$

$x=\frac{1-3y}{2}$ ....③

نعوض معادلة ③ في معادلة ②

$3x-2y=0$ ....②

$3\left(\frac{1-3y}{2}\right)-2y=0 \Rightarrow 2\left(3\left(\frac{1-3y}{2}\right)\right)-2(2y)=0 \Rightarrow 3(1-3y)-4y=0$

$3-9y-4y=0 \Rightarrow -13y=-3 \Rightarrow \frac{-13y}{-13}=\frac{-3}{-13}$

نقسم الطرفين على -13

$y=\frac{3}{13}$

نعوض قيمة $y=\frac{3}{13}$ في معادلة ③ لإيجاد قيمة x

$x=\frac{1-3y}{2}$ ....③

$x=\frac{1-3\left(\frac{3}{13}\right)}{2}$

$x=\frac{\frac{13}{13}-\frac{9}{13}}{2}$

$x=\frac{\frac{4}{13}}{2} \Rightarrow x=\frac{2}{13}$

$\therefore S=\left\{\left(\frac{2}{13},\frac{3}{13}\right)\right\}$

H.W جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض .

❶ $2x-y=-4$
$3x-y=3$
$S=\{(7,18)\}$

❷ $3x+2y=2$
$x-y=8$
$S=\left\{\left(\frac{18}{5},\frac{-22}{5}\right)\right\}$



للرياضيات شجره ولها ثمر



ثالثاً: حل المعادلات بالطريقة البيانية

تتبع الخطوات التالية .

خطوات الحل

❶ نكون جدول اول للمعادلة الاولى ونعوض قيم $x = \{-1, 0, 1\}$ لإيجاد قيم y ونكون ازواج مرتبة $\{(x, y)\}$ تمثل المستقيم الاول $\overleftrightarrow{L_1}$.

❷ نكون جدول ثاني للمعادلة الثانية ونعوض قيم $x = \{-1, 0, 1\}$ لإيجاد قيم y ونكون ازواج مرتبة $\{(x, y)\}$ تمثل المستقيم الثاني $\overleftrightarrow{L_2}$.

❸ نرسم نقاط (الازواج المرتبة) المستقيم الاول $\overleftrightarrow{L_1}$ في المستوي الاحداثي ثم نرسم نقاط (الازواج المرتبة) المستقيم الثاني $\overleftrightarrow{L_2}$ في المستوي الاحداثي .

❹ نجد نقطة التقاطع بين المستقيم الاول $\overleftrightarrow{L_1}$ والمستقيم الثاني $\overleftrightarrow{L_2}$ ونقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل $S = \{(x, y)\}$.

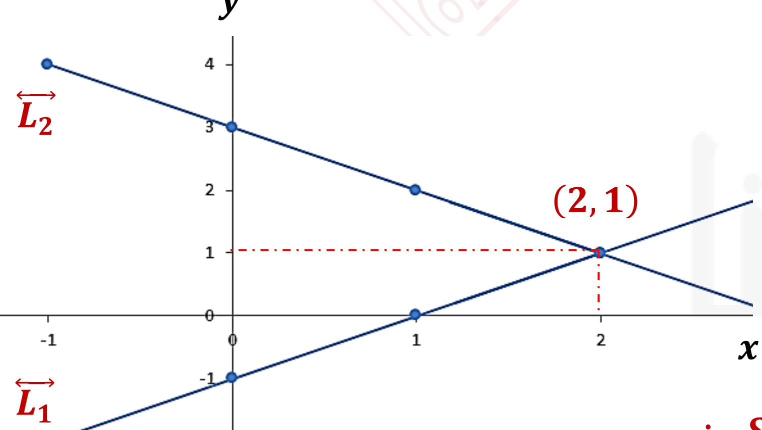
مثال 3 جد مجموعة حل النظام بيانياً لكل مما يأتي .

❶ $x - y = 1$
$x + y = 3$

Sol $x - y = 1 \ldots\ldots ① \Rightarrow y = x - 1$
$x + y = 3 \ldots\ldots ② \Rightarrow y = 3 - x$

$\overleftrightarrow{L_1}$			
x	$y = x - 1$	y	(x, y)
-1	$y = -1 - 1 = -2$	-2	$(-1, -2)$
0	$y = 0 - 1 = -1$	-1	$(0, -1)$
1	$y = 1 - 1 = 0$	0	$(1, 0)$
2	$y = 2 - 1 = 1$	1	$(2, 1)$

$\overleftrightarrow{L_2}$			
x	$y = 3 - x$	y	(x, y)
-1	$y = 3 - (-1) = 4$	4	$(-1, 4)$
0	$y = 3 - 0 = 3$	3	$(0, 3)$
1	$y = 3 - 1 = 2$	2	$(1, 2)$
2	$y = 3 - 2 = 1$	1	$(2, 1)$



يمكن ان نأخذ قيم $x = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$
ونعوض قيم في معادلة ① ومعادلة ② لإيجاد قيم y والنقطة
المشتركة في المستقيمين تمثل نقطة التقاطع ومجموعة الحل

$\therefore \; S = \{(2, 1)\}$



❷ $y = x - 2$

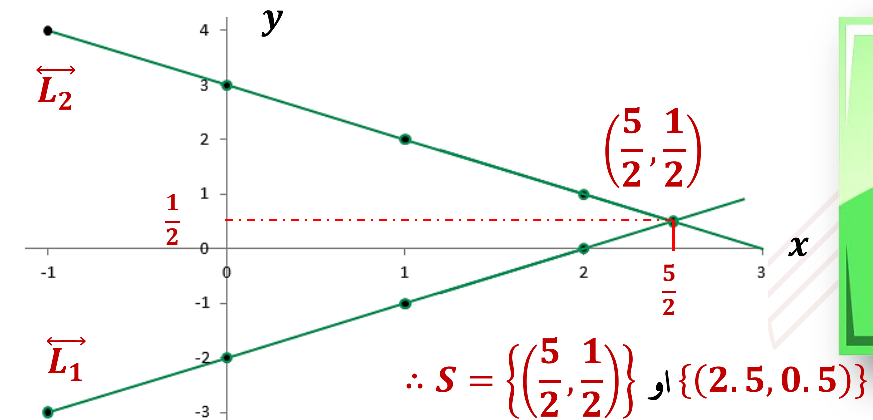
$y = 3 - x$

Sol $y = x - 2$.......①

$y = 3 - x$........②

$\overleftrightarrow{L_1}$			
x	$y = x - 2$	y	(x, y)
-1	$y = -1 - 2 = -3$	-3	$(-1, -3)$
0	$y = 0 - 2 = -2$	-2	$(0, -2)$
1	$y = 1 - 2 = -1$	-1	$(1, -1)$
2	$y = 2 - 2 = 0$	0	$(2, 0)$

$\overleftrightarrow{L_1}$			
x	$y = 3 - x$	y	(x, y)
-1	$y = 3 - (-1) = 4$	4	$(-1, 4)$
0	$y = 3 - 0 = 3$	3	$(0, 3)$
1	$y = 3 - 1 = 2$	2	$(1, 2)$
2	$y = 3 - 2 = 1$	1	$(2, 1)$



في هذا المثال لم نجد أي نقطة مشتركة لذلك نعمل امتداد للمستقيم الاول $\overleftrightarrow{L_1}$ والمستقيم الثاني $\overleftrightarrow{L_2}$ الى ان يتقاطع المستقيمان ثم من نقطة التقاطع نسقط مستقيم عمودي على محور x يمثل قيمة x واخر عمودي على محور y يمثل قيمة y

$\therefore S = \left\{\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ او $\{(2.5, 0.5)\}$

❸ $y - x - 2 = 0$

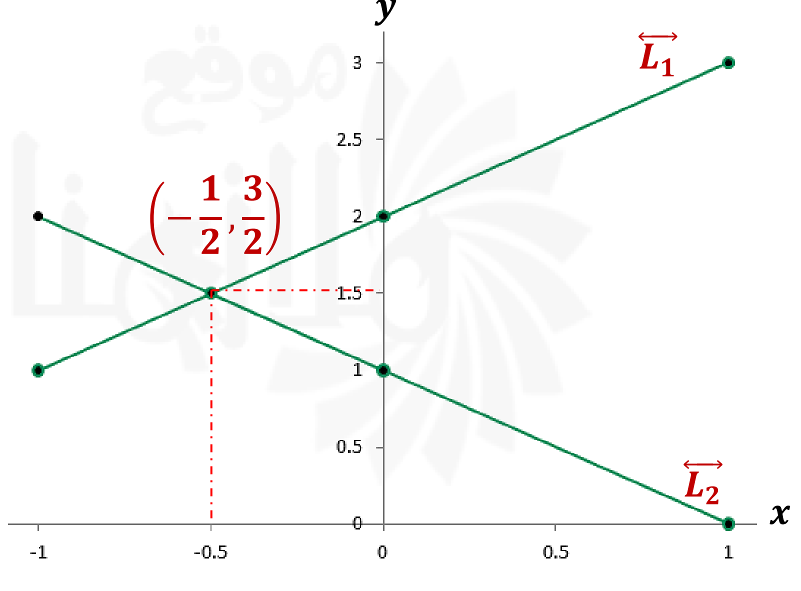
$y + x - 1 = 0$

Sol $y - x - 2 = 0$.....① $\Rightarrow y = x + 2$

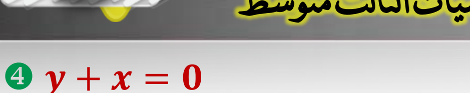
$y + x - 1 = 0$.....② $\Rightarrow y = 1 - x$

$\overleftrightarrow{L_1}$			
x	$y = x + 2$	y	(x, y)
-1	$y = -1 + 2 = 1$	1	$(-1, 1)$
0	$y = 0 + 2 = 2$	2	$(0, 2)$
1	$y = 1 + 2 = 3$	3	$(1, 3)$

$\overleftrightarrow{L_2}$			
x	$y = 1 - x$	y	(x, y)
-1	$y = 1 - (-1) = 2$	2	$(-1, 2)$
0	$y = 1 - 0 = 1$	1	$(0, 1)$
1	$y = 1 - 1 = 0$	0	$(1, 0)$



$\therefore S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$ او $\{(-0.5, 1.5)\}$

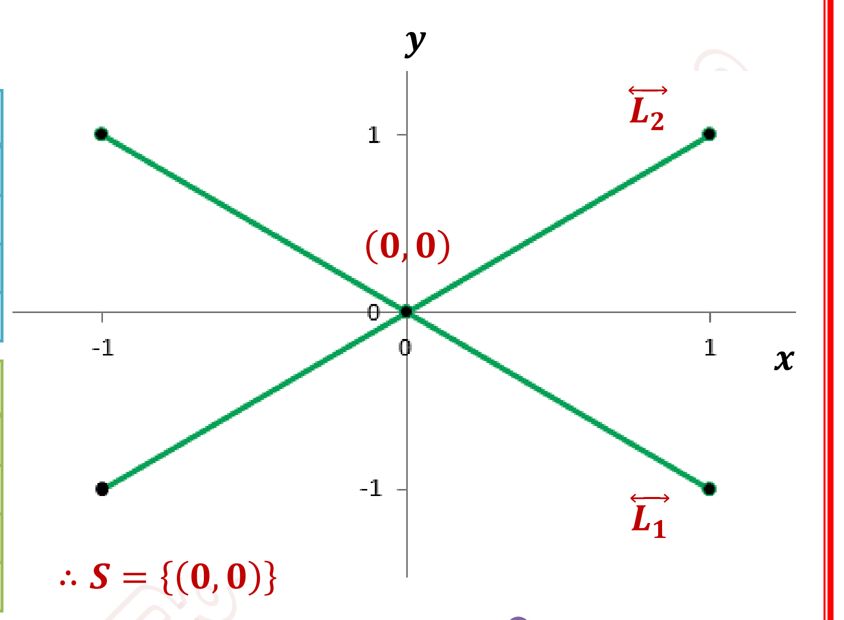


❹ $y + x = 0$
$y - x = 0$

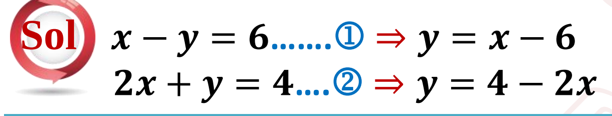
Sol $y + x = 0 ......① \Rightarrow y = -x$
$y - x = 0 ......② \Rightarrow y = x$

$\overleftrightarrow{L_1}$			
x	$y = -x$	y	(x, y)
-1	$y = -(-1) = 1$	1	$(-1, 1)$
0	$y = -(0) = 0$	0	$(0, 0)$
1	$y = -(1) = -1$	-1	$(1, -1)$

$\overleftrightarrow{L_2}$			
x	$y = x$	y	(x, y)
-1	$y = (-1) = -1$	-1	$(-1, -1)$
0	$y = (0) = 0$	0	$(0, 0)$
1	$y = (1) = 1$	1	$(1, 1)$



$\therefore S = \{(0, 0)\}$



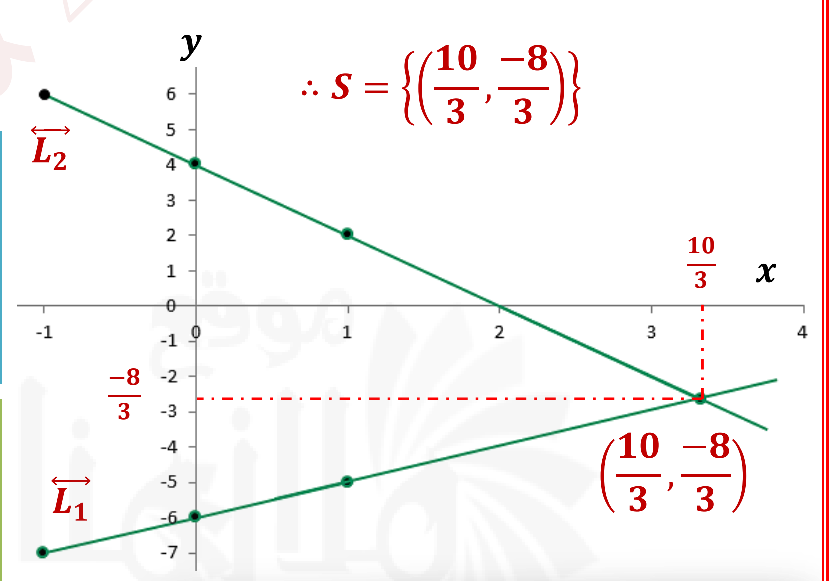
❺ $x - y = 6$
$2x + y = 4$

Sol $x - y = 6 ....① \Rightarrow y = x - 6$
$2x + y = 4 ....② \Rightarrow y = 4 - 2x$

$\overleftrightarrow{L_1}$			
x	$y = x - 6$	y	(x, y)
-1	$y = -1 - 6 = -7$	-7	$(-1, -7)$
0	$y = 0 - 6 = -6$	-6	$(0, -6)$
1	$y = 1 - 6 = -5$	-5	$(1, -5)$

$\overleftrightarrow{L_2}$			
x	$y = 4 - 2x$	y	(x, y)
-1	$y = 4 - 2(-1) = 6$	6	$(-1, 6)$
0	$y = 4 - 2(0) = 4$	4	$(0, 4)$
1	$y = 4 - 2(1) = 2$	2	$(1, 2)$

$\therefore S = \left\{\left(\frac{10}{3}, \frac{-8}{3}\right)\right\}$



في بعض المعادلات لا يمكن ايجاد قيمة المتغيرات بالمضبوط لذا نحاول حل هذه المعادلات بالحذف او التعويض ووضع الناتج في مجموعة الحل للطريقة البيانية

H.W جد مجموعة حل النظام بيانياً لكل مما يأتي .

❶ $x+y=-4$, $y-x=-6$ $\quad S=\{(1,-5)\}$	❷ $y=x-4$, $x=2-y$ $\quad S=\{(3,-1)\}$
❸ $y-x-2=0$, $y+x-1=0$ $\quad S=\{(-2,3)\}$	❹ $y=1+x$, $y=2-x$ $\quad S=\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$
❺ $3x-y=6$, $x-y=3$ $\quad S=\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{-3}{2}\right)\right\}$	❻ $y-x=3$, $y+x=0$ $\quad S=\left\{\left(\frac{-3}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$



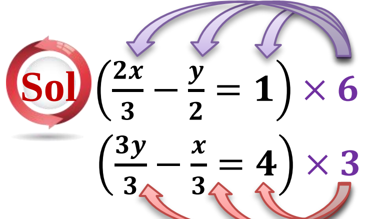
جد مجموعة حل النظام وتحقق من صحة الحل .

❶ $\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=1$

$\frac{3y}{3}-\frac{x}{3}=4$

عندما لا يذكر لنا طريقة الحل نحن نختار أي طريقة نستطيع ان نحل بها بسهولة

قبل ان نختار الطريقة نبسط المعادلتين بالتخلص من الكسور نضرب المعادلة الاولى في LCM للمقام وهو 6 ونضرب المعادلة الثانية في LCM وهو 3



Sol

$\left(\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=1\right)\times 6$

$\left(\frac{3y}{3}-\frac{x}{3}=4\right)\times 3$

$^{2}6\left(\frac{2x}{3}\right)-{}^{3}6\left(\frac{y}{2}\right)=6(1)$

$3\left(\frac{3y}{3}\right)-3\left(\frac{x}{3}\right)=3(4)$

$4x-3y=6$

$3y-x=12$

فقط نرتب كل متغير تحت المتغير الذي يشبه

$4x-3y=6$ ....①

$-x+3y=12$ ......②

باستخدام طريقة الحذف — بالجمع

$3x=18$

$\frac{3x}{3}=\frac{^{6}18}{3}$ بقسمة الطرفين على 3

$x=6$


نعوض قيمة $x=6$ في معادلة ② لإيجاد قيمة y

$-x+3y=12$ ......②

$-6+3y=12 \Rightarrow 3y=12+6$

$3y=18 \Rightarrow \frac{3y}{3}=\frac{^{6}18}{3}$ بقسمة الطرفين على 3

$y=6$

$\therefore S\{(6,6)\}$



للتحقق نعوض قيم $x=6$ و $y=6$ في معادلة ① ومعادلة ②

$4x-3y=6$ ....①

$4(6)-3(6)=6$

$24-18=6$

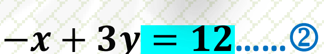
$\therefore 6=6$ ✓

$-x+3y=12$ ......②

$-6+3(6)=12$

$-6+18=12$

$\therefore 12=12$ ✓



❷ $0.2x - 3y = 2$
$0.1x - 6y = -3$

في هذا المثال نحول الكسور العشرية الى كسور اعتيادية
$0.2 = \frac{2}{10}$ و ايضاً $0.1 = \frac{1}{10}$

Sol

$\left(\frac{2}{10}x - 3y = 2\right) \times 10$
$\left(\frac{1}{10}x - 6y = -3\right) \times 10$

$10\left(\frac{2}{10}x\right) - 10(3y) = 10(2)$
$10\left(\frac{1}{10}x\right) - 10(6y) = 10(-3)$

$2x - 30y = 20$
$(x - 60y = -30)(\times -2)$

بضرب كل حدود المعادلة في -2

باستخدام طريقة الحذف

$2x - 30y = 20$ ……… ①
$-2x + 120y = 60$ ……… ②
بالجمع

$90y = 80 \Rightarrow \frac{90y}{90} = \frac{80}{90}$

$y = \frac{8}{9}$

نعوض قيمة $y = \frac{8}{9}$ في معادلة ① لإيجاد قيمة x

$2x - 30\left(\frac{8}{9}\right) = 20$ ……… ①

$2x - 10\left(\frac{8}{3}\right) = 20$

$2x - \frac{80}{3} = 20$

$2x = 20 + \frac{80}{3}$

$2x = \frac{60}{3} + \frac{80}{3}$

$2x = \frac{140}{3}$

$\frac{2x}{2} = \frac{\frac{140}{3}}{2}$

نقسم الطرفين على 2

$x = \frac{70}{3}$

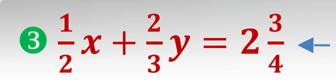
$\therefore S = \left\{\left(\frac{70}{3}, \frac{8}{9}\right)\right\}$

للتحقق نعوض قيم $x = \frac{70}{3}$ و $y = \frac{8}{9}$ في معادلة ①

$2x - 30y = 20$ ……… ①
$2\left(\frac{70}{3}\right) - 30\left(\frac{8}{9}\right) = 20$
$\frac{140}{3} - \frac{80}{3} = 20$
$\frac{140 - 80}{3} = 20$
$\frac{60}{3} = 20$
$\therefore 20 = 20$ ✓

للتحقق نعوض قيم $x = \frac{70}{3}$ و $y = \frac{8}{9}$ في معادلة ②

$-2x + 120y = 60$ … ②
$-2\left(\frac{70}{3}\right) + 120\left(\frac{8}{9}\right) = 60$
$\frac{-140}{3} + \frac{320}{3} = 60$
$\frac{-140 + 320}{3} = 60$
$\frac{180}{3} = 60$
$\therefore 60 = 60$ ✓



❸ $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2\frac{3}{4}$ ← $2\frac{3}{4} = \frac{11}{8}$

$\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 6\frac{1}{4}$ ← $6\frac{1}{4} = \frac{25}{4}$

Sol

$\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = \frac{11}{4}\right)(\times 12)$

$\left(\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = \frac{25}{4}\right)(\times 12)$

نتخلص من الكسور بضرب المعادلة ① في LCM للمقام وهو 12

ونضرب المعادلة ② في LCM وهو 12

$^{6}12\left(\frac{1}{2}x\right) + {}^{4}12\left(\frac{2}{3}y\right) = {}^{3}12\left(\frac{11}{4}\right)$

$^{3}12\left(\frac{1}{4}x\right) - {}^{4}12\left(\frac{2}{3}y\right) = {}^{3}12\left(\frac{25}{4}\right)$

$6(x) + 4(2y) = 3(11)$

$3(x) - 4(2y) = 3(25)$

باستخدام طريقة الحذف

$6x + 8y = 33$.......①

$3x - 8y = 75$.......②

بالجمع

$9x = 108 \Rightarrow \frac{9x}{9} = \frac{^{12}108}{9}$ نقسم الطرفين على 9

$x = 12$

نعوض قيمة $x = 12$ في معادلة ① لإيجاد قيمة y

$6x + 8y = 33$.......①

$6(12) + 8y = 33$

$72 + 8y = 33$

$8y = 33 - 72$

$8y = -39$

$\frac{8y}{8} = \frac{-39}{8}$ نقسم الطرفين على 8

$y = \frac{-39}{8}$

$\therefore S = \left\{\left(12, \frac{-39}{8}\right)\right\}$

للتحقق نعوض قيم $x = 12$ و $y = \frac{-39}{8}$ في معادلة ① ومعادلة ②

$6x + 8y = 33$ ... ①

$6(12) + 8\left(\frac{-39}{8}\right) = 33$

$72 - 39 = 33$

$\therefore 33 = 33$ ✓

$3x - 8y = 75$...②

$3(12) - 8\left(\frac{-39}{8}\right) = 75$

$36 + 39 = 75$

$\therefore 75 = 75$ ✓

H.W جد مجموعة حل النظام وتحقق من صحة الحل .

❶ $\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2$ $2x + 3y = 6$	$\therefore S = \left\{\left(\frac{24}{5}, \frac{-6}{5}\right)\right\}$
❷ $0.2x - 6y = 4$ $0.1x - 7y = -2$	$\therefore S = \{(50, 1)\}$
❸ $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{4}{3}$ $\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 0$	$\therefore S = \{(2, -1)\}$





مسائل حياتية

❶ **طقس**: تقل عدد الايام (x) التي تنخفض فيها درجات الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد الايام (y) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية.

اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف ، ثم جد حلها بطريقة الحذف .

Sol

عدد ايام شهر كانون الثاني = 31 يوم ،

نفرض عدد الايام التي تقل فيها درجات الحرارة $\Leftarrow x$

نفرض عدد الايام التي تزداد فيها درجات الحرارة $\Leftarrow y$



بالجمع

$y - x = 9 \ldots\ldots ①$

$x + y = 31 \ldots ②$

$2y = 40 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{40}{2}$

$y = 20$

$x + y = 31 \ldots ②$

نعوض قيمة $x = 20$ في معادلة ② لإيجاد قيمة y

$x + 20 = 31$

$x = 31 - 20 \Rightarrow x = 11$

$\therefore S = \{(11, 20)\}$

❷ **تجارة** : باع متجر 25 ثلاجة وغسالة بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة اذا كان ثمن هذه الاجهزة 20 مليون دينار فكم جهازاً باع من كل نوع ؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلهما بطريقة التعويض

Sol

نفرض عدد الثلاجات $\Leftarrow x$ ، نفرض عدد الغسالات $\Leftarrow y$

$x + y = 25 \ldots\ldots ①$

$1000000x + 500000y = 20000000$



$\frac{1000000x}{500000} + \frac{500000y}{500000} = \frac{20000000}{500000} \Rightarrow 2x + y = 40 \ldots\ldots ②$

نكون معادلة ③ من معادلة ①

$x = 25 - y \ldots\ldots ③$

نعوض معادلة ③ في معادلة ②

$2x + y = 40 \ldots ②$

$2(25 - y) + y = 40$

$50 - 2y + y = 40$

$-y = 40 - 50$

$-y = -10 \Rightarrow (-1)(-y) = (-1)(-10)$

$y = 10$

نعوض قيمة $y = 10$ في معادلة ③ لإيجاد قيمة x

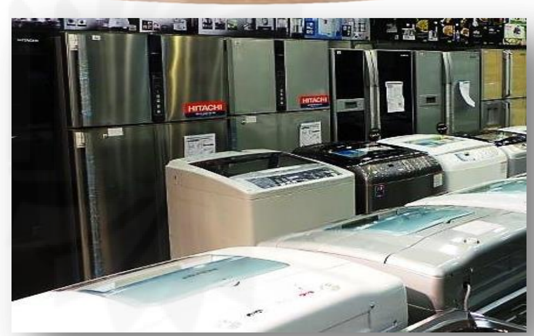
$x = 25 - y \ldots\ldots ③$

$x = 25 - 10$

$x = 15$

$\therefore S = \{(15, 10)\}$

فيكون عدد الثلاجات 15 وعدد الغسالات 10





③ **حفلة تخرج** : عمل سجاد وانور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الاصدقاء الذي دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الاصدقاء الذين دعاهم انور وكان عدد المدعوين 23 شخصاً. **فكم شخص دعا كل منهما ؟**

نفرض عدد الاصدقاء الذين دعاهم سجاد $\Leftarrow x$

نفرض عدد الاصدقاء الذين دعاهم أنور $\Leftarrow y$



Sol

بالجمع

$x + y = 23$.....①

$x - y = 3$.......②

$2x = 26$

$\frac{2x}{2} = \frac{26}{2}$

$x = 13$

نعوض قيمة $x = 13$ في معادلة ① لإيجاد قيمة y

$x + y = 23$.....①

$13 + y = 23$

$y = 23 - 13$

$y = 10$

$\therefore S = \{(13, 10)\}$

∴ عدد الاصدقاء الذين دعاهم سجاد 13 و عدد الاصدقاء الذين دعاهم أنور 10

فكر



أولاً تحدٍ جد مجموعة الحل للنظام .

$$\frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3$$

Sol

$\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y = 1\right) \times 3 \Rightarrow 3\left(\frac{1}{3}x\right) - 3\left(\frac{1}{3}y\right) = 3(1)$

$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3\right) \times 2 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}x\right) + 2\left(\frac{1}{2}y\right) = 2(3)$

بالجمع

$x - y = 3$....①

$x + y = 6$........②

$2x = 9$

$\therefore x = \frac{9}{2}$

نعوض قيمة $x = \frac{9}{2}$ في معادلة ② لإيجاد قيمة y

$2x + 2y = 12$........②

$2\left(\frac{9}{2}\right) + 2y = 12 \Rightarrow 9 + 2y = 12 \Rightarrow 2y = 12 - 9$

$2y = 3 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

$\therefore S = \left\{\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

ثانياً أصحح الخطأ قال احمد ان مجموعة حل النظام ،

$$\begin{matrix} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{matrix}$$

هي مجموعة $\left\{\left(\frac{5}{16}, \frac{5}{9}\right)\right\}$ ، اكتشف خطأ احمد و صححه .

Sol $2x + 3y = 6 \ldots\ldots ① \ (\times 2)$

$3x + 2y = 1 \ldots\ldots ② (\times -3)$

$$4x + 6y = 12$$
$$-9x - 6y = -3$$

بالجمع

$-5x = 9$

$\frac{-5x}{-5} = \frac{9}{-5}$

$x = \frac{-9}{5}$

$2x + 3y = 6 \ldots\ldots ①$

$2\left(\frac{-9}{5}\right) + 3y = 6$

$\frac{-18}{5} + 3y = 6$

$3y = 6 + \frac{18}{5}$

$3y = \frac{30+18}{5}$

$3y = \frac{48}{5} \Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{\frac{48}{5}}{3}$

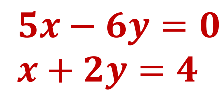
$y = \frac{16}{5}$

نعوض قيمة $x = \frac{-9}{5}$ في معادلة ① لإيجاد قيمة y

$\left\{\left(\frac{5}{16}, \frac{5}{9}\right)\right\}$ ✗

$\left\{\left(\frac{-9}{5}, \frac{16}{5}\right)\right\}$ ✓

$\therefore S = \left\{\left(\frac{-9}{5}, \frac{16}{5}\right)\right\}$





ثالثاً أكتب مجموعة حل النظام

$$\begin{matrix} 5x - 6y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{matrix}$$

Sol $5x - 6y = 0 \ldots\ldots ①$

$x + 2y = 4 \ \ldots\ldots ② \ (\times 3)$

$$5x - 6y = 0$$
$$3x + 6y = 12$$

بالجمع

$8x = 12$

$\frac{8x}{8} = \frac{12}{8} \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

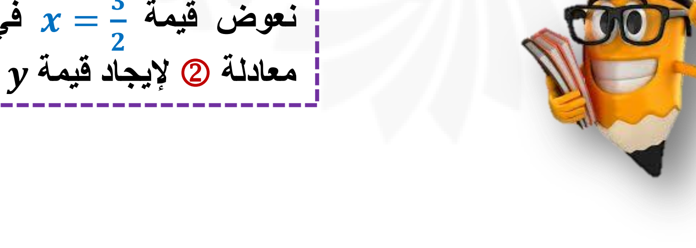
$x + 2y = 4 \ldots\ldots ②$

$\frac{3}{2} + 2y = 4 \Rightarrow 2y = 4 - \frac{3}{2}$

$2y = \frac{8-3}{2} \Rightarrow 2y = \frac{5}{2}$

$\frac{2y}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{4}$

نعوض قيمة $x = \frac{3}{2}$ في معادلة ② لإيجاد قيمة y



$\therefore S = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)\right\}$



الاختيارُ من متعدد — Multiple Choice

الدرس [1-3] حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين
Solving the system of two Linear Equations with two variables

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

1. $\begin{cases} y = 4x - 6 \\ y = x \end{cases}$ a) {(-2 , -2)} b) {(-2 , 2)} c) {(2 , -2)} d) {(2 , 2)} ✓

2. $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 3 - x \end{cases}$ a) {(-3 , 0)} b) {(3, 0)} ✓ c) {(0 , -3)} d) {(0 , 3)}

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض لكل مما يأتي:

3. $\begin{cases} 3x + 4y = 26 \\ 5x - 2y = 0 \end{cases}$ a) {(2 , 5)} ✓ b) {(-2 , -5)} c) {(2 , -5)} d) {(-2 , 5)}

4. $\begin{cases} y = 6x + 12 \\ 3y = 2x - 8 \end{cases}$ a) $\{(\frac{-11}{4}, \frac{9}{2})\}$ b) $\{(\frac{11}{4}, \frac{-9}{2})\}$ c) $\{(\frac{-11}{4}, \frac{-9}{2})\}$ ✓ d) $\{(\frac{11}{4}, \frac{9}{2})\}$

5. $\begin{cases} \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{4} = 2 \end{cases}$ a) {(12 , -10)} b) {(-12, -10)} c) {(12 , 10)} ✓ d) {(-12 , 10)}

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف لكل مما يأتي:

6. $\begin{cases} 7x - 4y = 12 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ a) $\{(-\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$ b) $\{(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$ c) $\{(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$ d) $\{(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$ ✓

7. $\begin{cases} 6y - 2x - 8 = 0 \\ y + x - 12 = 0 \end{cases}$ a) {(8 , -4)} b) {(8, 4)} ✓ c) {(-8 , 4)} d) {(-8 ,-4)}

8. $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = 2\frac{1}{3} \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 3\frac{1}{2} \end{cases}$ a) {(-2 , -6)} b) {(-2, 6)} c) {(2 , -6)} ✓ d) {(2 , 6)}



الدرس (3 – 2) حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

المعادلات التربيعية هي المعادلات التي يكون فيها اس المتغير تربيع وتكون مجموعة الحل فيها على شكل مجموعة فقط بالصيغة $S = \{\ \ \}$

وهناك طريقتين لحل المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0$

اولاً تحليل الفرق بين مربعين
نتبع الخطوات التالية .

1. يجب ان نصفر المعادلة بجعل الطرف الثاني يساوي صفر $ax^2 + bx + c = 0$.
2. اذا وجد عامل مشترك نستخرجه خارج قوس ثم نحلل داخل القوس .
3. بعد التحليل نستخدم خاصية الضرب الصفري وتتلخص في (أي عددين حاصل ضربهما يساوي صفر اما العدد الاول يساوي صفر او العدد الثاني يساوي صفر) $b = 0$ او $a = 0$ اما $a.b = 0 \Rightarrow$) يعني تكون قيمتين للمتغير .
4. نضع نواتج الحل في مجموعة الحل $S = \{\ \ \}$.

مثال 1 حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل .

❶ $16 - y^2 = 0$ باستخدام الفرق بين مربعين

Sol $(4 - y)(4 + y) = 0$

اما $4 - y = 0 \Rightarrow y = 4$

او $4 + y = 0 \Rightarrow y = -4$

$\therefore S = \{4, -4\}$

التحقيق : نعوض قيمة $y = 4$ في المعادلة

$16 - y^2 = 0 \Rightarrow 16 - (4)^2 = 0 \Rightarrow 16 - 16 = 0 \Rightarrow \therefore 0 = 0$ ✓

نعوض قيمة $y = -4$ في المعادلة

$16 - y^2 = 0 \Rightarrow 16 - (-4)^2 = 0 \Rightarrow 16 - 16 = 0 \Rightarrow \therefore 0 = 0$ ✓

❷ $x^2 = 49$

Sol $x^2 - 49 = 0$ باستخدام الفرق بين مربعين

$(x - 7)(x + 7) = 0$

اما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

او $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

$\therefore S = \{7, -7\}$

التحقيق : نعوض قيمة $x = 7$ في المعادلة

$x^2 = 49 \Rightarrow (7)^2 = 49 \Rightarrow \therefore 49 = 49$ ✓

نعوض قيمة $x = -7$ في المعادلة

$x^2 = 49 \Rightarrow (-7)^2 = 49 \Rightarrow \therefore 49 = 49$ ✓

$(-7)^2 = -7 \times -7 = 49$



باستخدام الفرق بين مربعين

③ $4x^2 - 25 = 0$

Sol $(2x-5)(2x+5) = 0$

اما $2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

او $2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow x = \frac{-5}{2}$

$\therefore S = \left\{\frac{5}{2}, \frac{-5}{2}\right\}$

التحقيق: نعوض قيمة $x = \frac{5}{2}$ في المعادلة

$4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 25 = 0$

$4\left(\frac{25}{4}\right) - 25 = 0 \Rightarrow 25 - 25 = 0$

$\therefore 0 = 0$ ✓

نعوض قيمة $x = \frac{-5}{2}$ في المعادلة

$4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow 4\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 25 = 0$

$4\left(\frac{25}{4}\right) - 25 = 0 \Rightarrow 25 - 25 = 0$

$\therefore 0 = 0$ ✓

نستخرج 3 عامل مشترك

④ $3z^2 - 12 = 0$

Sol $3(z^2 - 4) = 0$

تقسم الطرفين على 3

$\frac{3(z^2-4)}{3} = \frac{0}{3}$

$z^2 - 4 = 0$

باستخدام الفرق بين مربعين

$(z-2)(z+2) = 0$

اما $z - 2 = 0 \Rightarrow z = 2$

او $z + 2 = 0 \Rightarrow z = -2$

$\therefore S = \{2, -2\}$

التحقيق: نعوض قيمة $z = 2$ في المعادلة

$3z^2 - 12 = 0$

$3(2)^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(4) - 12 = 0$

$12 - 12 = 0 \Rightarrow \therefore 0 = 0$ ✓

نعوض قيمة $z = -2$ في المعادلة

$3z^2 - 12 = 0$

$3(-2)^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(4) - 12 = 0$

$12 - 12 = 0 \Rightarrow \therefore 0 = 0$ ✓



H.W حل المعادلات باستعمال الفرق بين مربعين ثم تحقق من صحة الحل .

❶ $x^2 - 16 = 0$	$S = \{4, -4\}$
❷ $3z^2 - 27 = 0$	$S = \{3, -3\}$
❸ $2z^2 - 8 = 0$	$S = \{2, -2\}$

مثال 2 حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك والفرق بين مربعين .

① $2y^2 - 6y = 0$ نستخرج $2y$ عامل مشترك خارج القوس

Sol $2y(y-3) = 0$

اما $2y = 0 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{0}{2} \Rightarrow y = 0$

او $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

$\therefore S = \{0, 3\}$

② $x^2 - 5 = 0$ باستخدام الفرق بين مربعين

Sol $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$

$5 = \sqrt{5} \times \sqrt{5}$

اما $x - \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5}$

او $x + \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}$

$\therefore S = \{\sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

③ $x^2 - 2 = 0$

Sol $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

$2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$

اما $x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$

او $x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$

$\therefore S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

④ $y^2 - \frac{1}{9} = 0$

Sol $\left(y - \frac{1}{3}\right)\left(y + \frac{1}{3}\right) = 0$

اما $y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

او $y + \frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

$\therefore S = \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

⑤ $(z+1)^2 - 36 = 0$

Sol $((z+1) - 6)((z+1) + 6) = 0$

$(z-5)(z+7) = 0$

اما $z - 5 = 0 \Rightarrow z = 5$

او $z + 7 = 0 \Rightarrow z = -7$ $\therefore S = \{5, -7\}$

$(z+1)^2$ تمثل مربعاً كاملاً يعني ان
$(z+1)^2 = (z+1)(z+1)$

⑥ $(y+5)^2 - 64 = 0$

Sol $((y+5) - 8)((y+5) + 8) = 0$

$(y-3)(y+13) = 0$

اما $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$

او $y + 13 = 0 \Rightarrow y = -13$

$\therefore S = \{3, -13\}$

⑦ $4(x^2 + 1) - 29 = 0$

في هذا المثال لا يمكن ان نستخدم الفرق بين مربعين لان القوس غير مرفوع الى تربيع . نفتح القوس بتوزيع العدد على داخل القوس

Sol $4x^2 + 4 - 29 = 0$

$4x^2 - 25 = 0$

$(2x-5)(2x+5) = 0$

اما $2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

او $2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow \frac{2x}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

$\therefore S = \left\{\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right\}$

⑧ $9(x^2 - 1) - 7 = 0$

Sol $9x^2 - 9 - 7 = 0$

$9x^2 - 16 = 0$

$(3x-4)(3x+4) = 0$

اما $3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

او $3x + 4 = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow \frac{3x}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

$\therefore S = \left\{\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$

H.W حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين والعامل المشترك

④ $7y^2 - 28 = 0$ $\therefore S = \{2, -2\}$	③ $(y+2)^2 - 49 = 0$ $\therefore S = \{5, -9\}$	② $5y^2 - 10 = 0$ $\therefore S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$	① $5y^2 - 20 = 0$ $\therefore S = \{2, -2\}$
⑧ $4(x^2 - 1) - 5 = 0$ $\therefore S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$	⑦ $4x^2 - 9 = 0$ $\therefore S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}\right\}$	⑥ $y^2 - \frac{1}{36} = 0$ $\therefore S = \left\{\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right\}$	⑤ $x^2 - 3 = 0$ $\therefore S = \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

ثانياً خاصية الجذر التربيعي تتبع الخطوات التالية

❶ نجعل المتغير ذات الاس التربيعي في طرف و الثوابت بالطرف الاخر ❷ ثم نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ❸ يكون ناتج الجذر التربيعي عدد موجب وسالب .

مثال 3 حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من الحل .

❶ $x^2 = 9$

Sol
$x^2 = 9$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ بجذر الطرفين
$x = \pm 3$
اما $x = 3$ او $x = -3$
$\therefore S = \{3, -3\}$

التحقيق : نعوض قيمة $x = 3$ و $x = -3$ في المعادلة
$x^2 = 9$
$3^2 = 9 \Rightarrow \therefore 9 = 9$ ✓
$(-3)^2 = 9 \Rightarrow \therefore 9 = 9$ ✓

❷ $y^2 = 36$

Sol
$y^2 = 36$
$\sqrt{y^2} = \sqrt{36}$ بجذر الطرفين
$y = \pm 6$
اما $y = 6$ او $y = -6$
$\therefore S = \{6, -6\}$

التحقيق : نعوض قيمة $y = 6$ و $y = -6$ في المعادلة
$y^2 = 36$
$6^2 = 36 \Rightarrow \therefore 36 = 36$ ✓
$(-6)^2 = 36 \Rightarrow \therefore 36 = 36$ ✓

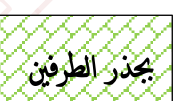
❸ $x^2 + 81 = 0$

Sol
$x^2 = -81$

لا يوجد لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية لأنه لا يوجد عدد تربيعه يساوي عدد سالب (يعني لا يوجد جذر تربيعي للعدد السالب) # له حل في الصف السادس

❹ $z^2 = \frac{9}{25}$

Sol
$z^2 = \frac{9}{25}$
$\sqrt{z^2} = \sqrt{\frac{9}{25}}$ بجذر الطرفين
$z = \pm \frac{3}{5}$
اما $z = \frac{3}{5}$ او $z = -\frac{3}{5}$
$\therefore S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$



التحقيق : نعوض قيمة $z = \frac{3}{5}$ و $z = -\frac{3}{5}$ في المعادلة
$z^2 = \frac{9}{25}$
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \therefore \frac{9}{25} = \frac{9}{25}$ ✓
$\left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \therefore \frac{9}{25} = \frac{9}{25}$ ✓

H.W حل المعادلات التالية باستعمال خاصية الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل .

❶ $x^2 = 64$	$S = \{8, -8\}$
❷ $x^2 = \frac{1}{64}$	$S = \left\{\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$



حل المعادلات التالية باستعمال خاصية الجذر التربيعي .

❶ $z^2 = 7$

Sol $z^2 = 7$

$\sqrt{z^2} = \sqrt{7}$ بجذر الطرفين

$z = \pm\sqrt{7}$

اما $z = \sqrt{7}$ او $z = -\sqrt{7}$

$\therefore S = \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$

❷ $4y^2 - 5 = 0$



Sol $4y^2 = 5$

$\frac{4y^2}{4} = \frac{5}{4}$ نقسم الطرفين على 4

$y^2 = \frac{5}{4} \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{5}{4}}$

$y = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow$ اما $y = \frac{\sqrt{5}}{2}$ او $y = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

❸ $2z^2 = 9$

Sol $2z^2 = 9$

$\frac{2z^2}{2} = \frac{9}{2}$ نقسم الطرفين على 2

$z^2 = \frac{9}{2} \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} \sqrt{z^2} = \sqrt{\frac{9}{2}}$

$z = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow$ اما $z = \frac{3}{\sqrt{2}}$ او $z = -\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore S = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$

❹ $3y^2 = 7$

في المثال ❹ نتخلص من معامل المتغير y قبل ان نجذر الطرفين

Sol $3y^2 = 7$

$\frac{3y^2}{3} = \frac{7}{3}$ نقسم الطرفين على 3

$y^2 = \frac{7}{3} \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$

$y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow$ اما $y = \sqrt{\frac{7}{3}}$ او $y = -\sqrt{\frac{7}{3}}$

$\therefore S = \left\{\sqrt{\frac{7}{3}}, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right\}$

❺ $2y^2 = \frac{49}{8}$

Sol $2y^2 = \frac{49}{8}$

$\frac{2y^2}{2} = \frac{\frac{49}{8}}{2}$ نقسم الطرفين على 2

نقلب خط القسمة الى ضرب ثم نقلب الكسر في المقام

$y^2 = \frac{49}{8} \times \frac{1}{2}$

$y^2 = \frac{49}{16} \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{49}{16}}$

$y = \pm\frac{7}{4} \Rightarrow$ اما $y = \frac{7}{4}$ او $y = -\frac{7}{4}$

$\therefore S = \left\{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\right\}$

❻ $\frac{1}{5}y^2 = \frac{1}{3}$

Sol $\frac{\frac{1}{5}y^2}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}}$ نقسم الطرفين على $\frac{1}{5}$

نقلب خط القسمة الى ضرب ثم نقلب الكسر في المقام

$y^2 = \frac{1}{3} \times \frac{5}{1}$

$y^2 = \frac{5}{3} \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} \sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

$y = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} \Rightarrow$ اما $y = \sqrt{\frac{5}{3}}$ او $y = -\sqrt{\frac{5}{3}}$

$\therefore S = \left\{\sqrt{\frac{5}{3}}, -\sqrt{\frac{5}{3}}\right\}$

❼ $z^2+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$

Sol $z^2=\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$

$z^2=\frac{5-4}{6} \Rightarrow z^2=\frac{1}{6}$

بجذر الطرفين

$\sqrt{z^2}=\sqrt{\frac{1}{6}} \Rightarrow z=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$

اما $z=\frac{1}{\sqrt{6}}$ او $z=-\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\therefore S=\left\{\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}$

❽ $4(x^2-12)=33$ نفتح القوس وندخل عليه ال4

Sol $4x^2-48=33 \xrightarrow{\text{نحول المتغيرات بطرف}} 4x^2=33+48$

$4x^2=81 \overset{\div 4}{\Rightarrow} \frac{4x^2}{4}=\frac{81}{4}$

$x^2=\frac{81}{4} \xrightarrow{\text{بجذر الطرفين}} x=\pm\frac{9}{2}$

اما $x=\frac{9}{2}$ او $x=-\frac{9}{2}$ $\therefore S=\left\{\frac{9}{2},-\frac{9}{2}\right\}$

H.W حل المعادلات التالية باستعمال خاصية الجذر التربيعي .

❶ $x^2=121$ $\therefore S=\{11,-11\}$	❷ $81-y^2=0$ $\therefore S=\{9,-9\}$	❺ $6z^2-5=0$ $\therefore S=\left\{\sqrt{\frac{5}{6}},-\sqrt{\frac{5}{6}}\right\}$
❸ $7(x^2-2)=50$ $\therefore S=\left\{\frac{8}{\sqrt{7}},-\frac{8}{\sqrt{7}}\right\}$	❹ $3y^2=\frac{25}{3}$ $\therefore S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right\}$	

مثال 5 حل المعادلات التالية.

ملاحظة : اذا كان المتغير في المعادلة داخل جذر تربيعي والمطلوب ايجاد قيمة المتغير ، نتخلص من الجذر بتربيع الطرفين ثم نجد قيمة المتغير

❶ $\sqrt{x}=5$

Sol $(\sqrt{x})^2=(5)^2$ تربيع الطرفين

$x=25$

❷ $3\sqrt{x}=18$ نقسم الطرفين على 3

Sol $\frac{3\sqrt{x}}{3}=\frac{18}{3}$ تربيع الطرفين

$\sqrt{x}=6 \Rightarrow (\sqrt{x})^2=(6)^2$

$x=36$

❸ $\sqrt{y+8}=3$

Sol $(\sqrt{y+8})^2=(3)^2$ تربيع الطرفين

$y+8=9$

$y=9-8$

$y=1$

❹ $\sqrt{5z}=7$

Sol $(\sqrt{5z})^2=(7)^2$ تربيع الطرفين

$5z=49$ نقسم الطرفين على 5

$\frac{5z}{5}=\frac{49}{5}$

$z=\frac{49}{5}$

❺ $\sqrt{\frac{x}{13}}=1$

Sol $\left(\sqrt{\frac{x}{13}}\right)^2=(1)^2$ تربيع الطرفين

$\frac{x}{13}=1 \Rightarrow \left(\frac{x}{13}=1\right)\times 13$ بضرب الطرفين في 13

$13\left(\frac{x}{13}\right)=13(1) \Rightarrow \therefore x=13$



H.W حل المعادلات التالية ؟

❶ $3\sqrt{x}=15$ $\therefore x=25$	❷ $\sqrt{y-5}=2$ $\therefore y=9$	❸ $\sqrt{2z}=6$ $\therefore z=18$	❹ $6\sqrt{x}=30$ $\therefore x=25$	❺ $\sqrt{y-9}=4$ $\therefore y=25$	❻ $\sqrt{4z}=8$ $\therefore z=16$



مسائل حياتية



❶ **الزقورة :** تعد الزقورة من المعالم الحضارية في العراق اذ انها تقع في جنوب العراق .
رسم باسل لوحة جدارية للزقورة مربعة الشكل مساحتها $9m^2$ على جدار اسمنتي . **جد طول ضلع اللوحة**

Sol

مساحة المربع $=$ (الطول)(العرض) $=$ (الضلع طول)^2

نفرض طول الضلع $= x$ فتكون

$x^2 =$ مساحة المربع

$x^2 = 9$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{9}$ بجذر الطرفين

$x = \pm 3$

اما $x = 3$ او $x = -3$ العدد السالب يهمل لأنه لا يمكن ان يكون طول ضلع سالب

$\therefore$ طول ضلع اللوحة $3m$



❷ **موكيت سجاد :** قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها $12m$ وعرضها $3m$، وقطعت الى اجزاء لتغطية ارضية غرفة مربعة الشكل . اكتب معادلة تمثل المسألة **ثم جد طول ضلع الغرفة ؟**

Sol

مساحة المستطيل $=$ (الطول)(العرض)

$\because$ مساحة المستطيل $=$ مساحة المربع

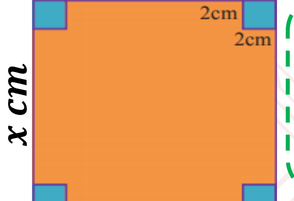
مساحة السجاد $= (3)(12) = 36m^2$

$\therefore$ مساحة الغرفة المربعة $=$ (طول الضلع)^2

مساحة الغرفة المربعة $= x^2 \xrightarrow{\text{نعوض مساحة المستطيل}} 36 = x^2 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} \sqrt{36} = \sqrt{x^2} \Rightarrow x = \pm 6$

اما $x = 6$ او $x = -6$ يهمل

$\therefore$ طول ضلع الغرفة $6m$



❸ **هندسة :** قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها xcm ، قطعت اربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع $2cm$ ، وثنيت لتكون صندوقاً دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه $32cm^3$.
اكتب معادلة تمثل المسألة **ثم جد طول ضلع قطعة الكارتون الاصلية ؟**

Sol

$\because$ قطعة الكارتون مربعة
$\therefore$ الطول $=$ العرض $= x - 4$
الارتفاع $= 2cm$

حجم متوازي السطوح $=$ (الطول)(العرض)(الارتفاع)

$32 = 2(x-4)(x-4)$

$[32 = 2(x-4)^2] \div 2$

$\frac{32}{2} = \frac{2(x-4)^2}{2} \xrightarrow{\text{نبسط}} 16 = (x-4)^2$ بجذر الطرفين

$\sqrt{16} = \sqrt{(x-4)^2} \xrightarrow{\text{نبسط}} \pm 4 = x - 4$

اما $x - 4 = +4 \Rightarrow x = +4 + 4 \Rightarrow x = 8cm$ طول ضلع الكارتون

او $x - 4 = -4 \Rightarrow x = -4 + 4 \Rightarrow x = 0$ يهمل





❹ **حوض سباحة :** صمم حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه $3m$ في منتصف حديقة مربعة الشكل ، فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيط بالحوض $40m^2$ اكتب معادلة تمثل المسألة، ثم جد طول ضلع الحديقة ؟

Sol

مساحة الحديقة المربعة $= x^2$

المساحة المتبقية + مساحة الحوض = مساحة الحديقة المربعة

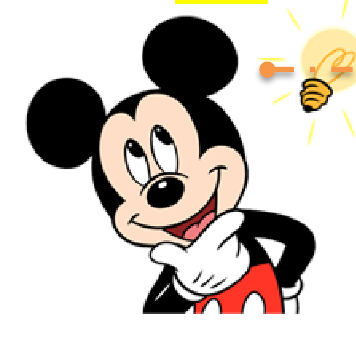
$$x^2 = (3)^2 + 40$$
$$x^2 = 9 + 40$$
$$x^2 = 49$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{49}$$
$$x = \pm 7$$

بجذر الطرفين

اما $x = 7$ او $x = -7$ يهمل

$\therefore$ طول ضلع الحديقة $= 7m$







فكر

أولاً تحدٍ

حل المعادلات التالية :

❶ $9(x^2 + 1) = 34$

Sol

$$9x^2 + 9 = 34$$
$$9x^2 = 34 - 9$$
$$9x^2 = 25$$
$$\frac{9x^2}{9} = \frac{25}{9}$$
$$x^2 = \frac{25}{9}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{25}{9}}$$
$$x = \pm\frac{5}{3}$$

نقسم الطرفين على 9

بجذر الطرفين

اما $x = \frac{5}{3}$ او $x = -\frac{5}{3}$

$$\therefore S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$$

❷ $4x^2 - 3 = 0$

Sol

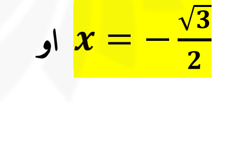
$$4x^2 = 3$$
$$\frac{4x^2}{4} = \frac{3}{4}$$
$$x^2 = \frac{3}{4}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$
$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نقسم الطرفين على 4

بجذر الطرفين

اما $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ او $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$





ثانياً هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة الحل للمعادلة ام لا ؟

❶ $2y^2 = \frac{16}{10}$, $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$

Sol $\left[2y^2 = \frac{16}{10}\right] \div 2 \Rightarrow \frac{2y^2}{2} = \frac{\frac{16}{10}}{2} \xRightarrow{\text{نبسط}} y^2 = \frac{16}{10} \times \frac{1}{2}$

$y^2 = \frac{^{8}16}{10} \times \frac{1}{2}$

$y^2 = \frac{8}{10} \xRightarrow{\text{نبسط}} y^2 = \frac{4}{5} \xRightarrow{\text{جذر الطرفين}} \sqrt{y^2} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$

اما $y = \frac{2}{\sqrt{5}}$ او $y = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\therefore S = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$



∴ المجموعة لا تمثل حل للمعادلة

❷ $3x^2 - 7 = 0$, $\left\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$

Sol $[3x^2 = 7] \div 3 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3}$

$x^2 = \frac{7}{3} \xRightarrow{\text{جذر الطرفين}} \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

اما $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ او $x = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\therefore S = \left\{\sqrt{\frac{7}{3}}, -\sqrt{\frac{7}{3}}\right\}$



∴ المجموعة لا تمثل حل للمعادلة

ثالثاً اصحح الخطأ

قال صلاح ان $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ تمثل مجموعة الحل للمعادلة $5x^2 = 4$. أكتشف خطأ صلاح و صححهُ؟

Sol $5x^2 = 4$

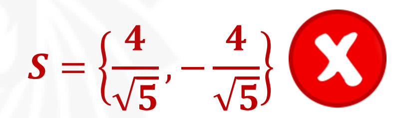
$\frac{5x^2}{5} = \frac{4}{5}$ (تقسم الطرفين على 5)

$x^2 = \frac{4}{5}$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{4}{5}}$ (بجذر الطرفين)

$x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore S = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$



$S = \left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ ✗



$S = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$ ✓



رابعاً حس عددي

عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أُنقِصَ من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة . ما العدد ؟

Sol

العدد هو 9 لان $(9)^2 - 1 = 81 - 1 = 80$

وال80 من مضاعفات العدد 10 \\ المضاعفات هي زيادة على 10 عشرة . أي انه . مضاعفات العشرة $= 10 + 10 + \cdots$

خامساً اكتب

مجموعة الحل للمعادلة $(8 - 3y)^2 - 1 = 0$.

$$(8 - 3y)^2 - 1 = 0$$

Sol

$$\big((8 - 3y) - 1\big)\big((8 - 3y) + 1\big) = 0$$

$$(-3y + 7)(-3y + 9) = 0$$

اما $-3y + 7 = 0$

$$-3y = -7$$

$$\frac{-3y}{-3} = \frac{-7}{-3}$$

نقسم الطرفين على -3

$$y = \frac{7}{3}$$

او $-3y + 9 = 0$

$$-3y = -9$$

$$\frac{-3y}{-3} = \frac{{}^{3}\!-9}{-3}$$

نقسم الطرفين على -3

$$y = 3$$

$$\therefore S = \left\{\frac{7}{3}, 3\right\}$$







Multiple Choice

الاختيارُ من متعدد

الدرس [2-3] حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

Solving Quadratic Equations with one variable

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

1. $3x^2 - 12x = 0$ a) $s=\{4, -4\}$ b) $s=\{3, -3\}$ ✔ c) $s=\{0, 4\}$ d) $s=\{0, 3\}$
2. $7z^2 - 21 = 0$ a) $s=\{7, -7\}$ b) $s=\{3, -3\}$ c) $s=\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$ ✔ d) $s=\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$
3. $4(x^2 - 1) - 5 = 0$ ✔ a) $s=\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$ b) $s=\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\}$ c) $s=\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$ d) $s=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$
4. $(y + 7)^2 - 81 = 0$ a) $s=\{2, -2\}$ b) $s=\{16, -16\}$ ✔ c) $s=\{2, -16\}$ d) $s=\{-2, 16\}$
5. $3x^2 - 6 = 0$ a) $s=\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ ✔ b) $s=\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ c) $s=\{6, -6\}$ d) $s=\{2, -2\}$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

6. $x^2 = 144$ a) $s=\{7, -7\}$ b) $s=\{14, -14\}$ ✔ c) $s=\{12, -12\}$ d) $s=\{12, 12\}$
7. $32 - 2y^2 = 0$ a) $s=\{6, 6\}$ ✔ b) $s=\{4, -4\}$ c) $s=\{6, -6\}$ d) $s=\{4, 4\}$
8. $5z^2 = 9$ a) $s=\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\}$ b) $s=\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\}$ ✔ c) $s=\{\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\}$ d) $s=\{\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\}$
9. $4(y^2 - 1) = 45$ ✔ a) $s=\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\}$ b) $s=\{\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\}$ c) $s=\{\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}\}$ d) $s=\{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\}$
10. $\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{9}$ a) $s=\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$ ✔ b) $s=\{\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\}$ c) $s=\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\}$ d) $s=\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\}$
11. $x^2 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$ a) $s=\{\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\}$ b) $s=\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$ c) $s=\{2, -2\}$ ✔ d) $s=\{1, -1\}$



الدرس (3 – 3)

حل المعادلات التربيعية بالتجربة

أولاً حل المعادلة بالتجربة من نوع $x^2 \pm ax \pm c = 0$ هذا النوع من المعادلات يكون فيه معامل x^2 يساوي واحد فقط (راجع فصل2 الدرس الرابع)

مثال 1 حل المعادلات التالية باستخدام التجربة وتحقق من صحة الحل .

❶ $x^2 - 7x + 12 = 0$

Sol $(x-4)(x-3) = 0$

اما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

او $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$\therefore S = \{4, 3\}$

التحقيق : نعوض قيمة $x = 3$ و $x = 4$ في المعادلة

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$(3)^2 - 7(3) + 12 = 9 - 21 + 12 = 21 - 21 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

$(4)^2 - 7(4) + 12 = 16 - 28 + 12 = 28 - 28 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

❷ $y^2 + 8y + 15 = 0$

Sol $(y+3)(y+5) = 0$

اما $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$

او $y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$

$\therefore S = \{-3, -5\}$

التحقيق : نعوض قيمة $y = -3$ و $y = -5$ في المعادلة

$y^2 + 8y + 15 = 0$

$(-3)^2 + 8(-3) + 15 = 9 - 24 + 15 = 24 - 24 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

$(-5)^2 + 8(-5) + 15 = 25 - 40 + 15 = 40 - 40 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

❸ $z^2 + z - 30 = 0$

Sol $(z+6)(z-5) = 0$

اما $z + 6 = 0 \Rightarrow z = -6$

او $z - 5 = 0 \Rightarrow z = 5$

$\therefore S = \{-6, 5\}$

التحقيق : نعوض قيمة $z = 5$ و $z = -6$ في المعادلة

$z^2 + z - 30 = 0$

$(5)^2 + (5) - 30 = 25 + 5 - 30 = 30 - 30 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

$(-6)^2 + (-6) - 30 = 36 - 6 - 30 = 30 - 30 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

❹ $x^2 - 2x - 63 = 0$

Sol $(x-9)(x+7) = 0$

اما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

او $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

$\therefore S = \{-7, 9\}$

التحقيق : نعوض قيمة $x = 9$ و $x = -7$ في المعادلة

$x^2 - 2x - 63 = 0$

$(9)^2 - 2(9) - 63 = 81 - 18 - 63 = 81 - 81 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

$(-7)^2 - 2(-7) - 63 = 49 + 14 - 63 = 63 - 63 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

❺ $y^2 + 48y - 49 = 0$

Sol $(y+49)(y-1) = 0$

اما $y + 49 = 0 \Rightarrow y = -49$

او $y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

$\therefore S = \{-49, 1\}$

التحقيق : نعوض قيمة $y = 1$ و $y = -49$ في المعادلة

$y^2 + 48y - 49 = 0$

$(1)^2 + 48(1) - 49 = 1 + 48 - 49 = 49 - 49 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

$(-49)^2 + 48(-49) - 49 = 2401 - 2352 - 49 = 2401 - 2401 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

H.W حل المعادلات التالية بالتجربة ثم تحقق من صحة الحل .

① $x^2 - 9x + 18 = 0$ $S = \{3, 6\}$	② $x^2 + 15x - 16 = 0$ $S = \{-16, 1\}$	③ $y^2 - 8y - 33 = 0$ $S = \{-3, 11\}$	④ $x^2 - 3x + 2 = 0$ $S = \{1, 2\}$
⑤ $x^2 - 15x + 56 = 0$ $S = \{7, 8\}$	⑥ $y^2 + 16y + 63 = 0$ $S = \{-9, -7\}$	⑦ $x^2 - 4x - 32 = 0$ $S = \{-4, 8\}$	⑧ $y^2 - y - 42 = 0$ $S = \{-6, 7\}$
⑨ $x^2 - 4x + 3 = 0$ $S = \{1, 3\}$	⑩ $y^2 - 6y - 55 = 0$ $S = \{-5, 11\}$	⑪ $y^2 + 9y - 36 = 0$ $S = \{-12, 3\}$	

ثانياً حل المعادلة بالتجربة من نوع $ax^2 \pm ax \pm c = 0$

هذا النوع من المعادلات يكون فيه معامل x^2 اكبرمن واحد (راجع فصل2 الدرس الرابع)

مثال 2 حل المعادلات التالية باستخدام التجربة .

① $4y^2 - 14y + 6 = 0$ نستخرج 2 خارج قوس عامل مشترك

Sol $2(2y^2 - 7y + 3) = 0$

$\frac{2(2y^2 - 7y + 3)}{2} = \frac{0}{2}$ نقسم الطرفين على 2

$2y - 7y + 3 = 0 \xRightarrow{\text{بالتجربة}} (2y - 1)(y - 3) = 0$

اما $2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 1 \xRightarrow{\div 2} \frac{2y}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

او $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$ $\quad \therefore s = \{\frac{1}{2}, 3\}$

② $3x^2 + 18x - 21 = 0$ نستخرج 3 خارج قوس عامل مشترك

Sol $3(x^2 + 6x - 7) = 0$

$\frac{3(x^2 + 6x - 7)}{3} = \frac{0}{3}$ نقسم الطرفين على 3

$x^2 + 6x - 7 = 0 \xRightarrow{\text{بالتجربة}} (x + 7)(x - 1) = 0$

اما $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

او $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\therefore s = \{-7, 1\}$

③ $20 + 13z + 2z^2 = 0$

Sol $(4 + z)(5 + 2z) = 0$

اما $4 + z = 0 \Rightarrow z = -4$

او $5 + 2z = 0 \Rightarrow 2z = -5 \xRightarrow{\div 2} \frac{2z}{2} = \frac{-5}{2} \Rightarrow z = \frac{-5}{2}$

$\therefore s = \{-4, \frac{-5}{2}\}$

④ $15x^2 - 11x - 14 = 0$

Sol $(5x - 7)(3x + 2) = 0$ بالتجربة

اما $5x - 7 = 0 \Rightarrow 5x = 7 \xRightarrow{\div 5} \frac{5x}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow x = \frac{7}{5}$

او $3x + 2 = 0 \Rightarrow 3x = -2 \xRightarrow{\div 3} \frac{3x}{3} = \frac{-2}{3} \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$

$\therefore s = \{\frac{-2}{3}, \frac{7}{5}\}$

⑤ $9x^2 - 69x - 24 = 0$

Sol $3(3x^2 - 23x - 8) = 0$

$\frac{3(3x^2 - 23x - 8)}{3} = \frac{0}{3}$

$3x^2 - 23x - 8 = 0 \xRightarrow{\text{بالتجربة}} (x - 8)(3x + 1) = 0$

اما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

او $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \xRightarrow{\div 3} \frac{3x}{3} = \frac{-1}{3} \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$

$\therefore s = \{\frac{-1}{3}, 8\}$

⑥ $42 + 64y + 24y^2 = 0$

Sol $2(21 + 32y + 12y^2 = 0)$ نقسم الطرفين على2

$\frac{2(21 + 32y + 12y^2)}{2} = \frac{0}{2}$

$21 + 32y + 12y^2 = 0 \xRightarrow{\text{بالتجربة}} (7 + 6y)(3 + 2y) = 0$

اما $7 + 6y = 0 \Rightarrow 6y = -7 \xRightarrow{\div 6} \frac{6y}{6} = \frac{-7}{6} \Rightarrow y = \frac{-7}{6}$

او $3 + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -3 \xRightarrow{\div 2} \frac{2y}{2} = \frac{-3}{2} \Rightarrow y = \frac{-3}{2}$

$\therefore s = \{\frac{-3}{2}, \frac{-7}{6}\}$

⑦ $70 - 33y - 4y^2 = 0$

Sol $(7 - 4y)(10 + y) = 0$

اما $7 - 4y = 0 \Rightarrow 4y = 7 \overset{\div 4}{\Rightarrow} \frac{4y}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{7}{4}$

او $10 + y = 0 \Rightarrow y = -10$

$\therefore s = \left\{-10, \frac{7}{4}\right\}$

⑧ $81 - 9x - 12x^2 = 0$

Sol $3(27 - 3x - 4x^2) = 0$

$\frac{3(27-3x-4x^2)}{3} = \frac{0}{3}$

$27 - 3x - 4x^2 = 0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (3 + x)(9 - 4x) = 0$

اما $3 + x = 0 \Rightarrow x = -3$

او $9 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 9 \overset{\div 4}{\Rightarrow} \frac{4x}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

$\therefore s = \left\{-3, \frac{9}{4}\right\}$

مثال 3 حل المعادلات التالية باستخدام التجربة ثم تحقق من صحة الحل .

① $80 - 38y + 3y^2 = 0$

Sol $(10 - y)(8 - 3y) = 0$

اما $10 - y = 0 \Rightarrow y = 10$

او $8 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 8 \overset{\div 4}{\Rightarrow} \frac{3y}{3} = \frac{8}{3} \Rightarrow y = \frac{8}{3}$

$\therefore s = \left\{\frac{8}{3}, 10\right\}$

التحقيق : نعوض قيمة $y = 10$ و $y = \frac{8}{3}$ في المعادلة

$80 - 38y + 3y^2 = 0$

$80 - 38(10) + 3(10)^2 = 80 - 380 + 300$

$= -300 + 300 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$80 - 38\left(\frac{8}{3}\right) + 3\left(\frac{8}{3}\right)^2 = 80 - \frac{304}{3} + 3\left(\frac{64}{9}\right)$

$= 80 - \frac{304}{3} + \frac{64}{3} = 80 - \frac{240}{3} = 80 - 80 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

② $50z^2 + 10z - 4 = 0$

Sol $2(25z^2 + 5z - 2) = 0$

$\frac{2(25z^2+5z-2)}{2} = \frac{0}{2}$

$25z^2 + 5z - 2 = 0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (5z + 2)(5z - 1) = 0$

اما $5z + 2 = 0 \Rightarrow 5z = -2 \overset{\div 5}{\Rightarrow} \frac{5z}{5} = \frac{-2}{5} \Rightarrow z = \frac{-2}{5}$

او $5z - 1 = 0 \Rightarrow 5z = 1 \overset{\div 5}{\Rightarrow} \frac{5z}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow z = \frac{1}{5}$

$\therefore s = \left\{\frac{-2}{5}, \frac{1}{5}\right\}$

التحقيق : نعوض قيمة $z = \frac{1}{5}$ و $z = \frac{-2}{5}$ في المعادلة

$50z^2 + 10z - 4 = 0$

$50\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{5}\right) - 4 = 50\left(\frac{1}{25}\right) + 2 - 4 = 0$

$= 2 + 2 - 4 = 4 - 4 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$50\left(\frac{-2}{5}\right)^2 + 10\left(\frac{-2}{5}\right) - 4 = 50\left(\frac{4}{25}\right) - 4 - 4 = 0$

$= 8 - -4 - 4 = 8 - 8 = 0$ يساوي الطرف الثاني

$\therefore 0 = 0$

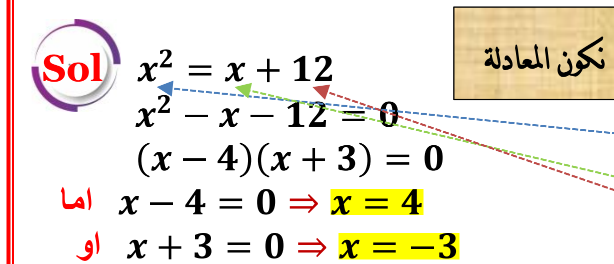
H.W حل المعادلات التالية بتحليل التجربة وتحقق من صحة الحل .

① $12x^2 - 20y + 7 = 0$ $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right\}$	② $28 + 2z - 8z^2 = 0$ $S = \left\{\frac{7}{4}, 2\right\}$	③ $4 - 26x + 12x^2 = 0$ $S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right\}$
④ $3x^2 - x - 10 = 0$ $S = \left\{\frac{-5}{3}, 2\right\}$	⑤ $7z^2 - 18z - 9 = 0$ $S = \left\{\frac{-3}{7}, 3\right\}$	⑥ $36 + 75x + 6x^2 = 0$ $S = \left\{\frac{1}{2}, 12\right\}$

مسائل يؤدي حلها الى معادلات من الدرجة الثانية ذات متغير واحد وتحل بالتجربة

❶ ما العدد الذي مربعهُ يزيد عليه بمقدار 12 ؟

نفرض العدد x فيكون مربع العدد x^2



عندما يكون في السؤال يزيد فتكون x^2 في طرف والطرف الثاني فيه مقدار الزيادة + قدر الزيادة

نكون المعادلة

Sol

$$x^2 = x + 12$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x-4)(x+3) = 0$$

اما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

او $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$\therefore$ العدد $= 4$ و -3

نلاحظ ان العدد 4 اذا نربعهُ يصبح 16 يعني يزيد عن العدد الاصلي ب 12

اما العدد -3 اذا نربعهُ يصبح 9 يعني يزيد على العدد الاصلي ب 12

❷ ما العدد الذي مربعهُ يزيد على ضعفهُ بمقدار 35 ؟

نفرض العدد x و ضعفهُ $2x$ ومربع العدد x^2

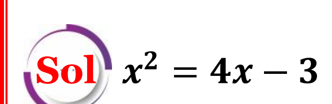
Sol $x^2 = 2x + 35$

$$x^2 - 2x - 35 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x-7)(x+5) = 0$$

اما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

او $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

$\therefore$ العدد $= 7$ و -5



❸ ما العدد الذي مربعهُ ينقص عن اربع امثالهُ بمقدار 3 ؟

نفرض العدد x اربعة أمثاله $4x$ ومربع العدد x^2

Sol $x^2 = 4x - 3$

عندما يكون في السؤال ينقص فتكون x^2 في طرف والطرف الثاني فيه مقدار النقيصة − قدر النقيصة

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x-3)(x-1) = 0$$

اما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

او $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$\therefore$ العدد $= 3$ و 1

❹ ما العدد الذي لو اضيف 4 امثاله الى مربعه كان الناتج 45 ؟

نفرض العدد x اربعة امثاله $4x$ ومربع العدد x^2

Sol $x^2 + 4x = 45$



عندما يكون في السؤال اضافة فتكون x^2 في طرف + مقدار الاضافة وفي الطرف الثاني الناتج

$$x^2 + 4x - 45 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x+9)(x-5) = 0$$

اما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

او $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

$\therefore$ العدد -9 و 5

❺ قطعة معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار $2m$ عن طولها . ما ابعاد القطعة المعدنية اذا كانت مساحتها $24m^2$ ؟

نفرض طول القطعة x فيكون عرض القطعة $x-2$

مساحة القطعة= (الطول) (العرض)

مساحة القطعة= $(x-2)(x)$

$x^2-2x=24$

دائماً نفرضه اولاً من يأتي في السؤال اخيراً سواء الطول او العرض

Sol

$x^2-2x=24$

$x^2-2x-24=0$

$(x-6)(x+4)=0$

اما $x-6=0 \Rightarrow x=6$

او $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ يهمل\لا يمكن ان يكون طول او عرض بالسالب

$\therefore$ طول القطعة $=6m$ فيكون عرض القطعة $=x-2=6-2=4m$

❻ سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار $2m$ ومساحتها $48m^2$. ما ابعاد السجادة ؟

نفرض عرض السجادة x فيكون طولها $x+2$

مساحة السجادة= (الطول) (العرض)

$(x+2)(x)=48$

$x^2+2x=48$

Sol

$x^2+2x=48$

$x^2+2x-48=0 \xRightarrow{\text{بالتجربة}} (x+8)(x-6)=0$

اما $x+8=0 \Rightarrow x=-8$ يهمل

او $x-6=0 \Rightarrow x=6$

$\therefore$ طول القطعة $=6m$ فيكون طول السجادة $=x+2=6+2=8m$

❼ عددان حاصل ضربهما 54 واحداهما يزيد عن الاخر بمقدار 3 . فما العددان ؟

نفرض العدد الاول x فيكون العدد الثاني $x+3$

Sol

$x(x+3)=54$

$x^2+3x-54=0 \xRightarrow{\text{بالتجربة}} (x+9)(x-6)=0$

اما $x+9=0 \Rightarrow x=-9$

او $x-6=0 \Rightarrow x=6$

$\therefore$ العددان -6 و -9 او العددان 6 و 9

❽ عددان حاصل ضربهما 48 احدهما يقل عن الاخر بمقدار 8 . فما العددان ؟

نفرض العدد الاول x فيكون العدد الثاني $x-8$

Sol

$x(x-8)=48$

$x^2-8x-48=0 \xRightarrow{\text{بالتجربة}} (x-12)(x+4)=0$

اما $x-12=0 \Rightarrow x=12$

او $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

$\therefore$ العددان -12 و -4 او العددان 12 و 4

⑨ صالة طعام ينقص طولها عن مثلي عرضها بمقدار $3m$ ومساحتها $54m^2$. فما ابعاد الصالة ؟

نفرض العرض x فيكون الطول $2x-3$

مساحة الصالة= (الطول)(العرض)

$(x)(2x-3)=54$

$2x^2-3x=54$

Sol $2x^2-3x=54$

$2x^2-3x-54 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} 0 (x-6)(2x+9)=0$

اما $x-6=0 \Rightarrow x=6$ او $2x+9=0 \Rightarrow 2x=-9 \Rightarrow \frac{2x}{2}=\frac{-9}{2} \Rightarrow x=\frac{-9}{2}$ يهمل

$\therefore$ عرض الصالة $=6m$ فيكون $\therefore$ طول الصالة $=2x-3=2(6)-3=12-3=9m$

⑩ حوض سباحة يزيد طوله على مثلي عرضه بمقدار $4m$ ومساحته $48m^2$. ما ابعاد المسبح ؟

نفرض العرض x فيكون الطول $2x+4$

مساحة المسبح= (الطول)(العرض)

$(x)(2x+4)=48$

$2x^2+4x=48$

Sol $2x^2+4x=48$

$2x^2+4x-48=0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (2x+12)(x-4)=0$

اما $2x+12=0 \Rightarrow 2x=-12 \overset{\div 2}{\Rightarrow} \frac{2x}{2}=\frac{-12}{2} \Rightarrow x=-6$ يهمل او $x-4=0 \Rightarrow x=4$

$\therefore$ عرض المسبح $=4m$ فيكون $\therefore$ طول المسبح $=2x+4=2(4)+4=8+4=12m$

H.W ما العدد الذي مربعهُ يزيد عليه بمقدار 42 ؟ $S=\{7,-6\}$

H.W أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار $4m$ على عرضها . ما ابعاد الارض اذا كانت مساحتها $60m^2$ ؟ $S=\{6,10\}$

مسائل حياتية

① كرة السلة : اذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار $2m$ على ضعف عرضهُ ، ومساحتهُ $480m^2$

فما بعدي الملعب ؟

نفرض العرض x فيكون الطول $2x+2$

مساحة الملعب= (الطول)(العرض)

$(2x+2)(x)=480$

$2x^2+2x=480$

Sol $2x^2+2x=480$

$2x^2+2x-480=0$

$2(x^2+x-240)=0$

$\frac{2(x^2+x-240)}{2}=\frac{0}{2}$

$x^2+x-240=0$

$(x+16)(x-15)=0$

2	240
2	120
2	60
	30
2	15

$16-15=1$

اما $x+16=0 \Rightarrow x=-16$ يهمل

او $x-15=0 \Rightarrow x=15$

$\therefore$ العرض $=15m$ $\therefore$ الطول $=2x+2=2(15)+2=30+2=32m$

❷ **سباحة :** مسبح يقل طوله عن ثلاث امثال عرضه بمقدار $1m$ فأذا كانت مساحة المسبح $140m^2$ جد ابعاده.

نفرض العرض x فيكون الطول $3x-1$

مساحة المسبح= (الطول) (العرض)

$$(3x-1)(x)=140$$
$$3x^2-x=140$$

Sol

$$3x^2-x=140$$

$$3x^2-x-140=0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (x-7)(3x+20)=0$$

اما $x-7=0 \Rightarrow x=7$ او $3x+20=0 \Rightarrow 3x=-20 \Rightarrow x=\frac{-20}{3}$ يهمل

$\therefore$ العرض $=7m$ $\therefore$ الطول $=3x-1=3(7)-1=21-1=20m$



❸ **رياضة :** اذا كان طول صورة اعلانية لملعب كرة القدم يزيد بمقدار $4m$ على ضعف عرضها . فما ابعاد الصورة اذا كانت مساحتها $160m^2$

نفرض العرض x فيكون الطول $2x+4$

مساحة الصورة= (الطول) (العرض)

$$(x)(2x+4)=160$$
$$2x^2+4x=160$$
$$2x^2+4x-160=0$$

Sol

$$2x^2+4x-160=0$$
$$2(x^2+2x-80)=0$$
$$\frac{2(x^2+2x-80)}{2}=\frac{0}{2}$$
$$x^2+2x-80=0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (x+10)(x-8)=0$$

اما $x+10=0 \Rightarrow x=-10$ يهمل او $x-8=0 \Rightarrow x=8$

$\therefore$ العرض $=8m$ $\therefore$ الطول $=2x+4=2(8)+4=16+4=20m$



❹ **حقل نعام :** اذا كان طول حقل لتربية النعام يقل بمقدار $4m$ عن ضعف عرضهُ فاذا كانت مساحة الحقل $96m^2$ فهل يكفي سياج طولهُ $44m$ لتحويط الحقل ؟

نفرض العرض x فيكون الطول $2x-4$

مساحة الحقل= (الطول) (العرض)

$$(x)(2x-4)=96$$
$$2x^2-4x=96$$
$$2x^2-4x-96=0$$

Sol

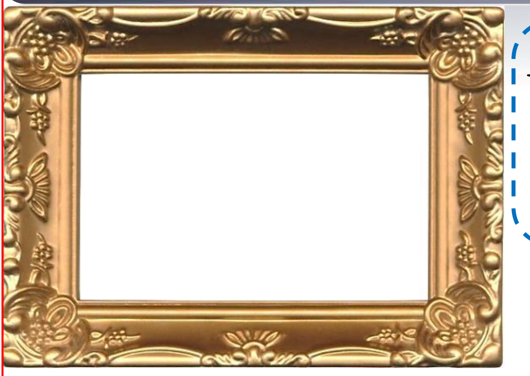
$$2x^2-4x-96=0$$
$$2(x^2-2x-48)=0$$
$$\frac{2(x^2-2x-48)}{2}=\frac{0}{2}$$
$$x^2-2x-48=0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (x-8)(x+6)=0$$

اما $x-8=0 \Rightarrow x=8$ او $x+6=0 \Rightarrow x=-6$ يهمل

$\therefore$ العرض $=8m$ $\therefore$ الطول $=2x-4=2(8)-4=16-4=12m$

محيط الحقل $=2$ (الطول + العرض) $=2(8+12)=2(20)=40m$

السياج الذي طول $44m$ يكفي لتحويط الحقل الذي تحتاج الى $40m$ فقط



5 **اطار صورة** : اشترى سامر اطار لصورة طوله ضعف عرضه. يحتاج سامر الى تصغير الاطار بمقدار $2cm$ من طوله وعرضه ليصبح مناسباً للصورة فما أبعاد الاطار الذي اشتراه سامر اذا كانت مساحة الصورة $40cm^2$.

ابعاد الاطار: نفرض العرض x والطول $2x$

ابعاد الصورة: العرض $x-2$ والطول $2x-2$

مساحة الصورة= (الطول) (العرض)

$$(x-2)(2x-2)=40$$
$$2x^2-2x-4x+4=40$$
$$2x^2-6x+4=40$$
$$2x^2-6x+4-40=0$$
$$2x^2-6x-36=0$$

Sol
$$2x^2-6x-36=0$$
$$2(x^2-3x-18)=0$$
$$\frac{2(x^2-3x-18)}{2}=\frac{0}{2}$$
$$x^2-3x-18=0$$
$$(x-6)(x+3)=0$$

اما $x-6=0 \Rightarrow x=6$

او $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ يهمل

∴ عرض الاطار $= 6cm$ | طول الاطار $= 2x = 2(6) = 12cm$



فكر

اولاً تحدِ

حل المعادلات التالية بتحليل التجربة .

1 $(x-3)(x+2)=14$

Sol
$$x^2+2x-3x-6=14$$
$$x^2-x-6-14=0$$
$$x^2-x-20=0$$
$$(x-5)(x+4)=0$$

اما $x-5=0 \Rightarrow x=5$

او $x+4=0 \Rightarrow x=-4$

$\therefore s=\{-4,5\}$

2 $3y^2-11y+10=80$

Sol
$$3y^2-11y+10-80=0$$
$$3y^2-11y-70=0$$
$$(y-7)(3y+10)=0$$

اما $y-7=0 \Rightarrow y=7$

او $3y+10=0 \Rightarrow 3y=-10$

$$\frac{3y}{3}=\frac{-10}{3} \Rightarrow y=\frac{-10}{3}$$

$\therefore S=\left\{7,\frac{-10}{3}\right\}$

ثانياً وضح

هل ان المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة ام لا ؟

❶ $4x^2 + 2x = 30 \quad , \left\{\frac{-2}{5}, 3\right\}$

Sol $4x^2 + 2x - 30 = 0$

$2(2x^2 + x - 15) = 0$

$\frac{2(2x^2+x-15)}{2} = \frac{0}{2}$

$2x^2 + x - 15 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x+3)(2x-5) = 0$

اما $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

او $2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \xrightarrow{\div 2} \frac{2x}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

$\therefore S = \left\{-3, \frac{5}{2}\right\}$ ✗ ∴ المجموعة المعطاة لا تمثل مجموعة الحل للمعادلة

❷ $42 - 33y + 6y^2 = 0 \quad , \left\{2, \frac{7}{2}\right\}$

Sol $3(14 - 11y + 2y^2) = 0$

$\frac{3(14-11y+2y^2)}{3} = \frac{0}{3}$

$14 - 11y + 2y^2 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (7-2y)(2-y) = 0$

اما $7 - 2y = 0 \Rightarrow 2y = 7 \xrightarrow{\div 2} \frac{2y}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{2}$

او $2 - y = 0 \Rightarrow y = 2$

$\therefore S = \left\{2, \frac{7}{2}\right\}$ ✓ ∴ المجموعة المعطاة تمثل مجموعة الحل للمعادلة

ثالثاً أصحح الخطأ



قالت رنا ان مجموعة الحل للمعادلة $2x^2 - 34x + 60 = 0$ هي $\{3, 15\}$. أحدد خطأ رنا وأصححه .

Sol $2x^2 - 34x + 60 = 0$

$2(x^2 - 17x + 30) = 0$

$\frac{2(x^2-17x+30)}{2} = \frac{0}{2}$

$x^2 - 17x + 30 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x-15)(x-2) = 0$

اما $x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15$ او $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\therefore S = \{2, 15\}$




$S = \{3, 15\}$ ✗



$S = \{2, 15\}$ ✓

رابعاً اكتب



معادلة تمثل المسألة ثم جد حلها . "ما العدد الذي ينقص مربعه عن ضعفه بمقدار 35 "

نفرض العدد x فيكون ضعفه $2x$ ومربعه x^2

Sol $2x = x^2 - 35$

$x^2 - 2x - 35 = 0$

$(x - 7)(x + 5) = 0$

اما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

او $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

∴ العددان 7 و -5





Multiple Choice **الاختيارُ من متعدد**

الدرس [3-3] حل المعادلات التربيعية بطريقة التجربة

Using Probe and Error to solve the Quadratic Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

1. $y^2 + 10y + 21 = 0$ a) $s=\{3,-7\}$ b) $s=\{-3,7\}$ c) $s=\{-3,-7\}$ ✓ d) $s=\{3,7\}$
2. $x^2 - 5x - 36 = 0$ a) $s=\{7,-8\}$ b) $s=\{-4,9\}$ ✓ c) $s=\{4,-9\}$ d) $s=\{-4,-9\}$
3. $x^2 - 8x - 48 = 0$ a) $s=\{4,12\}$ b) $s=\{4,-12\}$ c) $s=\{-4,12\}$ ✓ d) $s=\{-4,-12\}$
4. $4y^2 + 18y + 18 = 0$ a) $s=\{-3,\frac{3}{4}\}$ b) $s=\{3,\frac{3}{4}\}$ c) $s=\{3,\frac{3}{2}\}$ d) $s=\{-3,\frac{-3}{2}\}$ ✓
5. $6z^2 + 36z - 42 = 0$ a) $s=\{1,7\}$ b) $s=\{-1,7\}$ c) $s=\{-1,-7\}$ d) $s=\{1,-7\}$ ✓
6. $22 - 20y - 2y^2 = 0$ a) $s=\{11,1\}$ b) $s=\{1,-11\}$ ✓ c) $s=\{11,-1\}$ d) $s=\{-1,-11\}$
7. $32 + 12x - 9x^2 = 0$ a) $s=\{\frac{4}{3},\frac{8}{3}\}$ b) $s=\{\frac{-4}{3},\frac{-8}{4}\}$ c) $s=\{\frac{4}{3},\frac{-8}{3}\}$ d) $s=\{\frac{-4}{3},\frac{8}{3}\}$ ✓
8. ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 42 ؟

a) $s=\{7, 6\}$ b) $s=\{7, -6\}$ ✓ c) $s=\{-7, 6\}$ d) $s=\{-7, -6\}$

9. عددان حاصل ضربهما 54 ، أحدهما يزيد عن الآخر بمقدار 3 . فما العددان؟

a) $s=\{6, 9\}$ b) $s=\{6, -9\}$ ✓ c) $s=\{-6, 9\}$ d) $s=\{-6, -9\}$

10. عددان حاصل ضربهما 48 ، أحدهما يقل عن الآخر بمقدار 8 . فما العددان؟

a) $s=\{8, 6\}$ b) $s=\{12, -4\}$ ✓ c) $s=\{10, 4\}$ d) $s=\{-12, -4\}$



الدرس (3 − 4) حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل وإكمال المربع

اولاً حل المعادلات بالمربع الكامل

نتبع الخطوات التالية .

1. نصفر المعادلة (يعني الثوابت والمتغيرات بطرف والصفر بالطرف الثاني) ويجب ان تكون اشارة الحد الثالث موجبة .
2. نختبر الحد الوسط بالقانون (جذر الحد الثالث)(جذر الحد الاول) 2 = الحد الوسط ويجب ان يساوي الحد الوسط للمعادلة حتى نتبع هذه الطريقة
3. نفتح قوس مرفوع الى تربيع ونضع فيه كما موضح امامك

$$(\text{جذر الحد الاول} \pm \text{جذر الحد الثالث})^2 = 0$$

اشارة الحد الوسط

4. نجذر الطرفين ونجد مجموعة الحل $S = \{\quad\}$.

مثال 1 حل المعادلات التالية بالمربع الكامل .

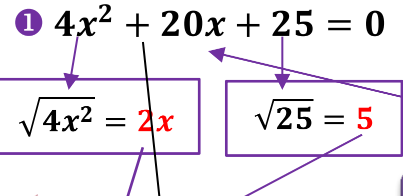
نجذر الحد الاول ونجذر الحد الثالث ونضرب المقدار في 2 اذا كان الناتج هو مساوي للحد الوسط اذاً المعادلة تمثل مربعاً كاملاً وتحل بالمربع الكامل واذا لم يساوي الحد الوسط اذاً المعادلة لا تمثل مربعاً كاملاً ونستخدم التجربة لحل المعادلة

1. $4x^2 + 20x + 25 = 0$

$\sqrt{4x^2} = 2x$, $\sqrt{25} = 5$

(جذر 3)(جذر 1) 2 = الحد الوسط

$20x = 2(2x)(5)$



Sol $(2x+5)^2 = 0$

بجذر الطرفين

$\sqrt{(2x+5)^2} = \sqrt{0}$

الجذر التربيعي يختصر مع الاس التربيعي

$2x + 5 = 0$

$2x = -5$

$\frac{2x}{2} = \frac{-5}{2}$

$x = \frac{-5}{2}$ $\quad \therefore S = \left\{\frac{-5}{2}\right\}$

2. $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$

(جذر 3)(جذر 1) 2 = الحد الوسط

$y = 2(y)\left(\frac{1}{2}\right)$

Sol $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$

بجذر الطرفين

$\sqrt{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{0}$

$y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

وسوف نكمل الحل بنفس الطريقة



③ $y^2 - 10y + 25 = 0$

الحد الوسط $= 2(\text{جذر }1)(\text{جذر }3)$
$10y = 2(y)(5)$

Sol $(y-5)^2 = 0$

بالجذر التربيعي $\sqrt{(y-5)^2} = \sqrt{0} \Rightarrow y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$

$\therefore S = \{5\}$

④ $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$

الحد الوسط $= 2(\text{جذر }1)(\text{جذر }3)$
$\frac{1}{2}x = 2\left(\frac{1}{4}\right)(x)$

Sol $\left(\frac{1}{4} - x\right)^2 = 0$

بالجذر التربيعي $\sqrt{\left(\frac{1}{4} - x\right)^2} = \sqrt{0} \Rightarrow \frac{1}{4} - x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

$\therefore S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

⑤ $y^2 + 4\sqrt{2}y + 8 = 0$

الحد الوسط $= 2(\text{جذر }1)(\text{جذر }3)$
$4\sqrt{2}y = 2(y)(\sqrt{8})$

$\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Sol $(y + \sqrt{8})^2 = 0$

بالجذر التربيعي $\sqrt{(y+\sqrt{8})^2} = \sqrt{0} \Rightarrow y + \sqrt{8} = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{8}$

$\therefore S = \{-\sqrt{8}\}$

⑥ $3 - 6\sqrt{3}z + 9z^2 = 0$

الحد الوسط $= 2(\text{جذر }1)(\text{جذر }3)$
$6\sqrt{3}z = 2(\sqrt{3})(3z)$

Sol $(\sqrt{3} - 3z)^2 = 0$

بالجذر التربيعي $\sqrt{(\sqrt{3} - 3z)^2} = \sqrt{0} \Rightarrow \sqrt{3} - 3z = 0$

$3z = \sqrt{3} \overset{\div 3}{\Rightarrow} \frac{3z}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

⑦ $\frac{1}{9} - \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}z^2 = 0$

الحد الوسط $= 2(\text{جذر }1)(\text{جذر }3)$
$\frac{1}{3}z = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}z\right)$

Sol $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}z\right)^2 = 0$

بالجذر التربيعي $\sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}z\right)^2} = \sqrt{0} \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2}z = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}z = \frac{1}{3}$

$\overset{\div\frac{1}{2}}{\Rightarrow} \frac{\frac{1}{2}z}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow z = \frac{1}{3} \times \frac{2}{1} \Rightarrow z = \frac{2}{3} \quad \therefore S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

⑧ $3y^2 + 36 - 12\sqrt{3}y = 0$

الحد الوسط $= 2(\text{جذر }1)(\text{جذر }3)$
$12\sqrt{3}y = 2(\sqrt{3}y)(6)$

Sol $3y^2 - 12\sqrt{3}y + 36 = 0$

$(\sqrt{3}y - 6)^2 = 0$ بالجذر التربيعي $\sqrt{(\sqrt{3}y - 6)^2} = \sqrt{0}$

$\sqrt{3}y - 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}y = 6 \overset{\div\sqrt{3}}{\Rightarrow} \frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{6}{\sqrt{3}}$

$\therefore S = \left\{\frac{6}{\sqrt{3}}\right\}$

H.W حل المعادلات التالية بالمربع الكامل .

① $9z^2 - 10z + \frac{25}{9} = 0$ $S = \left\{\frac{5}{9}\right\}$	② $4x^2 - 4x + 1 = 0$ $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$	③ $x^2 + 12x + 36 = 0$ $S = \{-6\}$	④ $x^2 + 16x = -64$ $S = \{-8\}$
⑤ $x^2 + 24x + 144 = 0$ $S = \{-12\}$	⑥ $7 - 2\sqrt{7}z + z^2 = 0$ $S = \{\sqrt{7}\}$	⑦ $y^2 + 2\sqrt{7}y + 7 = 0$ $S = \{-\sqrt{7}\}$	⑧ $y^2 - 20y + 100 = 0$ $S = \{10\}$

ثانياً حل المعادلات بإكمال المربع

نتبع الخطوات التالية .



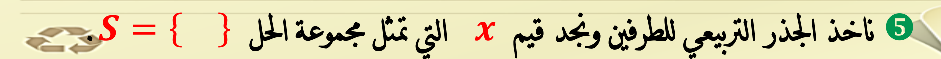
① نضع المعادلة بالصورة $ax^2 \pm bx = c$ حيث $a \neq 0$ أي نضع الحد المطلق (الثابت) بعد المساواة .

② اذا كان $a \neq 1$ نقسم المعادلة على a (يعني اذا كان معامل x^2 اكبر من واحد نقسم طرفي المعادلة على معامل x^2)

③ نضيف الى طرفي المعادلة المقدار التالي $\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$ (يعني ناخذ نصف معامل x ونربعه) .

④ نحلل الطرف الايسر الذي اصبح مربعاً كاملاً بعد الخطوة ③ ونبسط الطرف الثاني .

⑤ ناخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x التي تمثل مجموعة الحل $S = \{\quad\}$



سوف نحل الامثلة التالية حسب الخطوات اعلاه

مثال[1] حل المعادلات التالية بطريقة اكمال المربع .

اصبح الطرف الاول للمعادلة يمثل مربع كامل

❶ $x^2-4x-12=0$

Sol $x^2-4x=12$

$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}(4)\right)^2=(2)^2=4$ نضيفها لطرفي المعادلة

$x^2-4x+4=12+4$

$(x-2)^2=16 \xrightarrow{\text{بالجذر التربيعي}} \sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{16}$

$x-2=\pm4 \Rightarrow$ اما $x-2=+4 \Rightarrow x=4+2 \Rightarrow x=6$

او $x-2=-4 \Rightarrow x=-4+2 \Rightarrow x=-2$

$\therefore S=\{-2,6\}$

❷ $x^2-2x=0$

Sol

$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}(2)\right)^2=(1)^2=1$ نضيفه لطرفي المعادلة

$x^2-2x+1=0+1$

$(x-1)^2=1 \xrightarrow{\text{بالجذر التربيعي}} \sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{1}$

$x-1=\pm1 \Rightarrow$ اما $x-1=1 \Rightarrow x=1+1 \Rightarrow x=2$

$\Rightarrow$ او $x-1=-1 \Rightarrow x=-1+1 \Rightarrow x=0$

$\therefore S=\{0,2\}$

❸ $3y^2+2y=1$ نقسم المعادلة على 3 للتخلص من معامل y^2

Sol $\frac{3y^2}{3}+\frac{2y}{3}=\frac{1}{3}$

$y^2+\frac{2}{3}y=\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ نضيفه لطرفي المعادلة

$y^2+\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$

$\left(y+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9} \xrightarrow{\text{بالجذر التربيعي}} y+\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ اما $y+\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}-\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ او $y+\frac{1}{3}=\frac{-2}{3} \Rightarrow y=\frac{-2}{3}-\frac{1}{3} \Rightarrow y=\frac{-3}{3} \Rightarrow y=-1$

$\therefore S=\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$

❹ $5y^2+15y-30=0$ نقسم المعادلة على 3 للتخلص من معامل y^2

Sol $\frac{5y^2}{5}+\frac{15y}{5}-\frac{30}{5}=\frac{0}{5}$

$y^2+3y-6=0$

$\left(\frac{1}{2}(3)\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ نضيفه لطرفي المعادلة

$y^2+3y+\frac{9}{4}=6+\frac{9}{4}$

$\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{33}{4} \xrightarrow{\text{بالجذر التربيعي}} y+\frac{3}{2}=\pm\frac{\sqrt{33}}{2}$

$\Rightarrow$ اما $y+\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{33}-3}{2}$

$\Rightarrow$ او $y+\frac{3}{2}=-\frac{\sqrt{33}}{2} \Rightarrow y=-\frac{\sqrt{33}}{2}-\frac{3}{2} \Rightarrow y=\frac{-\sqrt{33}-3}{2}$

$\therefore S=\left\{\frac{-\sqrt{33}-3}{2},\frac{\sqrt{33}-3}{2}\right\}$

❺ $x^2-\frac{2}{3}x=4$

$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ نضيفه لطرفي المعادلة

Sol $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=4+\frac{1}{9}$

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{37}{9} \xrightarrow{\text{بالجذر التربيعي}} x-\frac{1}{3}=\pm\frac{\sqrt{37}}{3}$

$\Rightarrow$ اما $x-\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{37}}{3}+\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{37}+1}{3}$

$\Rightarrow$ او $x-\frac{1}{3}=\frac{-\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{37}}{3}+\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{-\sqrt{37}+1}{3}$

$\therefore S=\left\{\frac{-\sqrt{37}+1}{3},\frac{\sqrt{37}+1}{3}\right\}$

❻ $y^2+2\sqrt{3}y=3$

$\left(\frac{1}{2}(2\sqrt{3})\right)^2=(\sqrt{3})^2=3$ نضيفه لطرفي المعادلة

Sol $y^2+2\sqrt{3}y+3=3+3$

$(y+\sqrt{3})^2=6 \xrightarrow{\text{بالجذر التربيعي}} y+\sqrt{3}=\pm\sqrt{6}$

$\Rightarrow$ اما $y+\sqrt{3}=\sqrt{6} \Rightarrow y=\sqrt{6}-\sqrt{3}$

$\Rightarrow$ او $y+\sqrt{3}=-\sqrt{6} \Rightarrow y=-\sqrt{6}-\sqrt{3}$

$\therefore S=\{\sqrt{6}-\sqrt{3},-\sqrt{6}-\sqrt{3}\}$

❼ $2y^2-3=3y$

Sol $2y^2-3y=3$

$\frac{2y^2}{2}-\frac{3y}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow y^2-\frac{3y}{2}=\frac{3}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$ نضيفه لطرفي المعادلة

$y^2-\frac{3}{2}y+\frac{9}{16}=\frac{3}{2}+\frac{9}{16}$

$\left(y-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{33}{16} \xrightarrow{\text{بالجذر التربيعي}} y-\frac{3}{4}=\pm\frac{\sqrt{33}}{4}$

$\Rightarrow$ اما $y-\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{33}}{4}+\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{3+\sqrt{33}}{4}$

$\Rightarrow$ او $y-\frac{3}{4}=\frac{-\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y=\frac{-\sqrt{33}}{4}+\frac{3}{4} \Rightarrow y=\frac{3-\sqrt{33}}{4}$

$\therefore S=\left\{\frac{3-\sqrt{33}}{4},\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right\}$

H.W حل المعادلات التالية بأكمال المربع .

❶ $x^2 - 10x - 24 = 0$ $S = \{-2, 12\}$	❷ $8y^2 + 16y - 64 = 0$ $S = \{-4, 2\}$	❸ $4x^2 - 3x - 16 = 0$ $S = \left\{\frac{-\sqrt{265}+3}{8}, \frac{\sqrt{265}+3}{8}\right\}$
❹ $y^2 - 8y = 24$ $S = \{-2\sqrt{10}+4, 2\sqrt{10}+4\}$	❺ $y^2 - 3 = 2y$ $S = \{-1, 3\}$	❻ $4z^2 - 12z - 27 = 0$ $S = \left\{\frac{-3}{2}, \frac{9}{2}\right\}$
❼ $4y^2 + 20y - 11 = 0$ $S = \left\{\frac{-11}{2}, \frac{1}{2}\right\}$		

مثال 2 حل المعادلات التالية بأكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لاقرب عدد صحيح .

❶ $x^2 - 6x = 15$

Sol

$x^2 - 6x + 9 = 15 + 9$

نضيف 9 الى طرفي المعادلة

$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}(6)\right)^2 = (3)^2 = 9$

$(x-3)^2 = 24$

$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{24} \Rightarrow x - 3 = \pm\sqrt{24}$

$\sqrt{24} \simeq 5$

$\Rightarrow$ اما $x - 3 = \sqrt{24} \Rightarrow x = \sqrt{24} + 3 \Rightarrow x \simeq 5 + 3 \Rightarrow x \simeq 8$

$\Rightarrow$ او $x - 3 = -\sqrt{24} \Rightarrow x = -\sqrt{24} + 3 \Rightarrow x \simeq -5 + 3 \Rightarrow x \simeq -2$ $\quad \therefore S = \{-2, 8\}$

❷ $y(2y + 28) = 28$

Sol

$2y^2 + 28y = 28$

$\frac{2y^2}{2} + \frac{28y}{2} = \frac{28}{2}$

$y^2 + 14y = 14$

$y^2 + 14y + 49 = 14 + 49$

نضيف 49 الى طرفي المعادلة

$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}(14)\right)^2 = (7)^2 = 49$

$(y+7)^2 = 63$

$\sqrt{(y+7)^2} = \sqrt{63}$

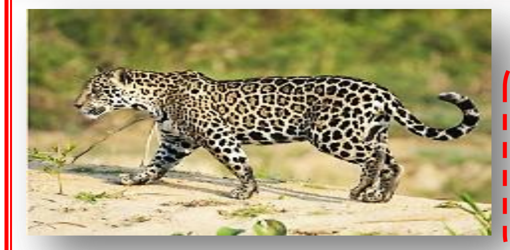
$\sqrt{63} \simeq 8$

$y + 7 = \pm\sqrt{63} \Rightarrow$ اما $y + 7 = \sqrt{63} \Rightarrow y = \sqrt{63} - 7 \Rightarrow y \simeq 8 - 7 \Rightarrow y \simeq 1$

$\Rightarrow$ او $y + 7 = -\sqrt{63} \Rightarrow y = -\sqrt{63} - 7 \Rightarrow y \simeq -8 - 7 \Rightarrow y \simeq -15$ $\quad \therefore S = \{-15, 1\}$

H.W $x^2 - 10x + 10 = 0$ $\quad S = \{1, 9\}$

مسائل حياتية



① الجكوار : هو احد السنوريات الكبرى المنتمية لجنس النمور ، جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 20x + 100 = 0$ التي تمثل طول ضلع المنطقة المربعة المحددة له بالمتر المربع في حديقة الحيوانات .

نختبر الحد الوسط ثم نحل المعادلة بالمربع الكامل

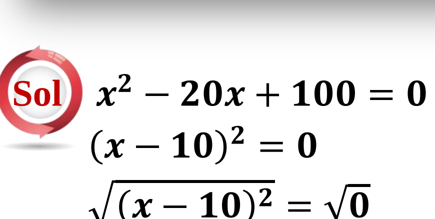
الحد الوسط = 2(جذر 1)(جذر 3)

$20x = 2(x)(10)$

Sol

$$x^2 - 20x + 100 = 0$$
$$(x-10)^2 = 0$$
$$\sqrt{(x-10)^2} = \sqrt{0}$$
$$x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10m$$

هو طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر



② مدينة بابل : هي مدينة عراقية تقع على نهر الفرات ، وكانت عاصمة البابليين ايام حكم حمورابي سنة (1792-1750) قبل الميلاد . جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 28x + 196 = 0$ التي تمثل مساحة طول ضلع احدى القاعات المربعة الشكل.

نختبر الحد الوسط ثم نحل المعادلة بالمربع الكامل

الحد الوسط = 2(جذر 1)(جذر 3)

$28x = 2(x)(14)$

Sol

$$x^2 - 28x + 196 = 0$$
$$(x-14)^2 = 0$$
$$\sqrt{(x-14)^2} = \sqrt{0}$$
$$x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14m$$

طول ضلع القاعة



③ حيتان : تجنح بعض مجموعات من الحيتان الى الشاطئ ولا يوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة ويحاول حماة البيئة ارجاعها الى البحر . حل المعادلة $x^2 + 20x = 525$ بطريقة اكمال المربع لايجاد قيمة x التي تمثل عدد الحيتان التي جنحت الى احد شواطئ استراليا .



نحل المعادلة بإكمال المربع

$$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(20)\right)^2 = (10)^2 = 100$$

نضيف 100 الى طرفي المعادلة

Sol

$$x^2 + 20x = 525$$
$$x^2 + 20x + 100 = 525 + 100$$
$$(x+10)^2 = 625 \Rightarrow \sqrt{(x+10)^2} = \sqrt{625}$$

$x + 10 = \pm 25 \Rightarrow$ اما $x + 10 = 25 \Rightarrow x = 25 - 10 \Rightarrow x = 15$ عدد الحيتان التي جنحت الى الشواطئ

$\Rightarrow$ او $x + 10 = -25 \Rightarrow x = -25 - 10 \Rightarrow x = -35$ يهمل



④ **دب الباندا:** المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 متراً وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها . جد ابعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لاقرب عدد صحيح .

نفرض الطول x فيكون العرض $x-8$

مساحة المنطقة = (الطول) (العرض)

$x(x-8)=126$

$x^2-8x=126$

نحل المعادلة بإكمال المربع

$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}(8)\right)^2=(4)^2=16$

Sol

$x^2-8x=126$

$x^2-8x+16=126+16$ نضيف 16 الى طرفي المعادلة

$(x-4)^2=142$

$\sqrt{(x-4)^2}=\sqrt{142}$ $\sqrt{142}\simeq 12$

$x-4=\pm\sqrt{142}\Rightarrow$ اما $x-4\simeq 12\Rightarrow x\simeq 12+4\Rightarrow x\simeq 16$

$\Rightarrow$ او $x-4\simeq -12\Rightarrow x\simeq -12+4\Rightarrow x\simeq -8$ يهمل

$\therefore$ الطول $=16m$ العرض $=x-8=16-8=8m$

⑤ **شكل هندسي:** مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار $2cm$ جد طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح اذا كانت مساحته $36cm^2$.

نفرض العرض x فيكون الطول $x+2$

مساحة المستطيل = (الطول) (العرض)

$x(x+2)=36$

$x^2+2x=36$

نحل المعادلة بإكمال المربع

$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}(2)\right)^2=(1)^2=1$

Sol

$x^2+2x=36$

$x^2+2x+1=36+1$ نضيف 1 الى طرفي المعادلة

$(x+1)^2=37$

$\sqrt{(x+1)^2}=\sqrt{37}$ $\sqrt{37}\simeq 6$

$x+1=\pm\sqrt{37}\Rightarrow$ اما $x+1\simeq 6\Rightarrow x\simeq 6-1\Rightarrow x\simeq 5$

$\Rightarrow$ او $x+1\simeq -6\Rightarrow x\simeq -6-1\Rightarrow x\simeq -7$ يهمل

$\therefore$ العرض $=5cm$ الطول $=x+2=5+2=7cm$



فكر

أولاً تحـدٍ

حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع . وجد النتائج بالتقريب لأقرب عدد صحيح .

❶ $4x(x-6)=27$

Sol

$4x^2-24x=27$

$\frac{4x^2}{4}-\frac{24x}{4}=\frac{27}{4}$

$x^2-6x=\frac{27}{4}$

$x^2-6x+9=\frac{27}{4}+9$ — نضيف 9 الى طرفي المعادلة

$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}(6)\right)^2=(3)^2$

$(x-3)^2=\frac{63}{4}$

$\sqrt{(x-3)^2}=\sqrt{\frac{63}{4}}$

$\sqrt{63}\simeq 8$

$x-3=\pm\frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow$ اما $x-3=\frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow x\simeq\frac{8}{2}+3 \Rightarrow x\simeq 4+3 \Rightarrow x\simeq 7$

$\Rightarrow$ او $x-3=-\frac{\sqrt{63}}{2} \Rightarrow x\simeq-\frac{8}{2}+3 \Rightarrow x\simeq -4+3 \Rightarrow x\simeq -1$

$\therefore S=\{-1,7\}$

---

❷ $6y^2-48y=6$

Sol

$\frac{6y^2}{6}-\frac{48y}{6}=\frac{6}{6}$

$y^2-8y=1$

$y^2-8y+16=1+16$ — نضيف 16 الى طرفي المعادلة

$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$

$\left(\frac{1}{2}(8)\right)^2=(4)^2=16$

$(y-4)^2=17$

$\sqrt{(y-4)^2}=\sqrt{17}$

$\sqrt{17}\simeq 4$

$y-4=\pm\sqrt{17} \Rightarrow$ اما $y-4=\sqrt{17} \Rightarrow y\simeq 4+4 \Rightarrow y\simeq 8$

$\Rightarrow$ او $y-4=-\sqrt{17} \Rightarrow y\simeq -4+4 \Rightarrow y\simeq 0$

$\therefore S=\{0,8\}$





ثانياً اصحح الخطأ

حلت سوسن المعادلة $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ بطريقة اكمال المربع وكتبت مجموعة الحل للمعادلة بالشكل الاتي $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$ أكتشف خطأ سوسن وصححه .

$$\left(\frac{1}{2}(\text{معامل الحد الثاني})\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3})\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

Sol

$$4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$$

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{4\sqrt{3}x}{4} + \frac{3}{4} = \frac{0}{4}$$

$$x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = 0$$

$$x^2 - \sqrt{3}x = \frac{-3}{4}$$

نضيف $\frac{3}{4}$ الى طرفي المعادلة

$$x^2 - \sqrt{3}x + \frac{3}{4} = \frac{-3}{4} + \frac{3}{4}$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$$

$$x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$ ✗

ثالثاً حس عددي

هل ان مجموعة حل للمعادلة $y^2 - 4y + 4 = 0$ تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والاخرى موجبة؟ وضح ذلك

Sol

$$y^2 - 4y + 4 = 0$$

$$(y-2)^2 = 0$$

$$\sqrt{(y-2)^2} = \sqrt{0}$$

$$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

قيم المعادلة هي موجبة فقط

الحد الوسط $= 2(\text{جذر }1)(\text{جذر }3)$

$$4y = 2(y)(2)$$

رابعاً اكتــب

مجموعة الحل للمعادلة: $\frac{1}{81} - \frac{2}{9}z + z^2 = 0$



Sol

سوف نحل المعادلة بالمربع الكامل لانها تحقق شروطه وغير مذكور في السؤال نوع طريقة الحل

$$\left(\frac{1}{9} - z\right)^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} \frac{1}{9} - z = 0$$

$$z = \frac{1}{9} \qquad \therefore S = \left\{\frac{1}{9}\right\}$$

Multiple Choice — الاختيارُ من متعدد

الدرس [3-4] حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

Using Completing the Square to solve the Quadratic Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

		a	b	c	d
1	$x^2 + 6x + 9 = 0$	a) $x = 6$	✓ b) $x = -3$	c) $x = 4$	d) $x = 3$
2	$4z^2 - 20z + 25 = 0$	a) $z = \frac{-5}{2}$	b) $z = \frac{-2}{5}$	✓ c) $z = \frac{5}{2}$	d) $z = \frac{2}{5}$
3	$\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$	✓ a) $y = \frac{1}{4}$	b) $y = \frac{-1}{4}$	c) $y = \frac{1}{2}$	d) $y = \frac{-1}{2}$
4	$y^2 - 2\sqrt{3}y + 3 = 0$	a) $y = -3$	b) $y = 3$	c) $y = -\sqrt{3}$	✓ d) $y = \sqrt{3}$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

		a	b	c	d
5	$x^2 - 12x = 13$	a) $s = \{13, 1\}$	✓ b) $s = \{13, -1\}$	c) $s = \{-13, 1\}$	d) $s = \{-13, -1\}$
6	$4y^2 - 32y = 17$	a) $s = \{\frac{1}{2}, \frac{17}{2}\}$	b) $s = \{\frac{-1}{2}, \frac{2}{17}\}$	c) $s = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{17}\}$	✓ d) $s = \{\frac{-1}{2}, \frac{17}{2}\}$
7	$16z^2 - 40z - 11 = 0$	a) $s = \{\frac{11}{4}, \frac{1}{4}\}$	b) $s = \{\frac{-11}{4}, \frac{-1}{4}\}$	✓ c) $s = \{\frac{11}{4}, \frac{-1}{4}\}$	d) $s = \{\frac{-11}{4}, \frac{1}{4}\}$

8. $y^2 - \frac{1}{3}y = \frac{2}{9}$
   a) $\{\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\}$, b) $\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\}$
   ✓ c) $\{\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\}$, d) $\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\}$

9. $z^2 + 2\sqrt{5}\,z = 4$
   a) $s = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$ b) $s = \{\sqrt{5} - 3, 3 - \sqrt{5}\}$
   ✓ c) $s = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$ d) $s = \{\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 3\}$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

		a	b	c	d
10	$x^2 - 8x = 8$	a) $s \approx \{9, 1\}$	✓ b) $s \approx \{9, -1\}$	c) $s \approx \{-9, 1\}$	d) $s \approx \{-9, -1\}$





الدرس (3 – 5)

حل المعادلات بالقانون

اولاً: حل المعادلات باستخدام القانون العام (الدستور)

تعلمنا في الدروس السابقة كيفية حل معادلات من الدرجه الثانية متكونه من ثلاث حدود بطرائق عدة (المربع الكامل و التجربه و اكمال المربع) . ولكن هناك معادلات لايمكن حلها بهذه الطرق وخاصة المقادير الناتجة من (تحليل الفرق او مجموع مكعبين \ القوس الكبير) سوف نحلها بطريقة الدستور لايجاد الجذور الحقيقية لهذه المعادلات التربيعية.

سوف نتبع الخطوات التالية.

1. نضع المعادلة التربيعيه بالصوره العامه (القياسية) $ax^2 \pm bx \pm c = 0$ أي نصفر الطرف الثاني بتحويل جميع الحدود للطرف الاول
2. نكتب قيم المعاملات حيث a معامل x^2 ، b معامل x ، c الحد المطلق (الحد الثالث) . كل معامل مع اشارتة.
3. نعوض قيم المعاملات بالقانون التالي (قانون الدستور) حيث $a \neq 0$ $$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$
4. ثم نضع قيم الحل في مجموعة الحل $S = \{\quad\}$.

مثال 1

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستخدام طريقة القانون العام (الدستور) .

1. $x^2 - 3x - 5 = 0$

نستخرج المعاملات ثم نعوضها بالقانون

Sol $a = 1$ $b = -3$ $c = -5$

نكتب القانون

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{+3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} x = \begin{cases} \frac{3+\sqrt{29}}{2} \\ \frac{3-\sqrt{29}}{2} \end{cases}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{3+\sqrt{29}}{2}, \frac{3-\sqrt{29}}{2}\right\}$$

❷ $y^2 + 5y - 1 = 0$

نستخرج المعاملات ثم نعوضها بالقانون

Sol $a = 1$ $b = 5$ $c = -1$

$$y = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$y = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

لا يمكن اخراج ال29 من تحت الجذر

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} y = \begin{cases} \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \\ \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \end{cases} \quad \therefore S = \left\{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right\}$$

---

❸ $3x^2 - 9x = -2$

نصفر المعادلة ثم نستخرج المعاملات و نعوضها بالقانون. انتبه: عند التحويل تقلب الإشارة

Sol $3x^2 - 9x + 2 = 0$

$a = 3$ $b = -9$ $c = 2$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{+9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} x = \begin{cases} \frac{9 + \sqrt{57}}{6} \\ \frac{9 - \sqrt{57}}{6} \end{cases} \quad \therefore S = \left\{\frac{9 + \sqrt{57}}{6}, \frac{9 - \sqrt{57}}{6}\right\}$$

---

❹ $4y^2 + 8y = 6$

نصفر المعادلة ثم نقسمها على 2 ثم نستخرج العوامل

Sol $4y^2 + 8y - 6 = 0$

$(4y^2 + 8y - 6 = 0) \div 2 \Rightarrow 2y^2 + 4y - 3 = 0$

$a = 2$ $b = 4$ $c = -3$

هنا الجذر يمكن تحليله

2	40
2	20
2	10
5	5
	1

$\sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$$y = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$y = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+24}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2(-2 \pm \sqrt{10})}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{2} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} y = \begin{cases} \frac{-2 + \sqrt{10}}{2} \\ \frac{-2 - \sqrt{10}}{2} \end{cases} \quad \therefore S = \left\{\frac{-2 + \sqrt{10}}{2}, \frac{-2 - \sqrt{10}}{2}\right\}$$

⑤ $2y^2 - 3 = -5y$

نصفر المعادلة ثم نرتب الحدود و نستخرج العوامل

Sol $2y^2 - 3 + 5y = 0 \xrightarrow{\text{نرتب الحدود}} 2y^2 + 5y - 3 = 0$

$a = 2 \quad b = 5 \quad c = -3$

$\sqrt{49} = 7$

$$y = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$y = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

$$y = \frac{-5 \pm 7}{4} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} y = \begin{cases} \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-5-7}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \end{cases} \qquad \therefore S = \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$$

---

⑥ $2y^2 - 2 = -10y$

نصفر المعادلة ثم نقسمها على 2 ثم نستخرج العوامل

Sol $2y^2 - 2 + 10y = 0 \xrightarrow{\text{نرتب الحدود}} 2y^2 + 10y - 2 = 0$

$(2y^2 + 10y - 2 = 0) \div 2 \Rightarrow y^2 + 5y - 1 = 0$





نقسم المعادلة على 2 لانه عامل مشترك في جميع الحدود

$a = 1 \quad b = 5 \quad c = -1$

$$y = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$y = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} y = \begin{cases} \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \\ \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} \end{cases} \qquad \therefore S = \left\{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2}, \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right\}$$

---

⑦ $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Sol $a = 4 \quad b = -12 \quad c = 9$

جذر الصفر = صفر . أي رقم يجمع او يطرح من الصفر يبقى نفسه

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)} = \frac{+12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \qquad \therefore S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

⑧ $3x^2 - 6(2x+1) = 0$

ندخل خارج القوس على داخله . انتبه للإشارة السالبة

Sol $3x^2 - 6(2x+1) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 12x - 6 = 0$

تقسم المعادلة على 3 لانه عامل مشترك في جميع الحدود

$(3x^2 - 12x - 6 = 0) \div 3 \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$

$a = 1$ $b = -4$ $c = -2$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{+4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = \frac{2(2 \pm \sqrt{6})}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

$x = 2 \pm \sqrt{6} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} x = \begin{cases} 2+\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{6} \end{cases}$ $\therefore S = \{2+\sqrt{6}, 2-\sqrt{6}\}$

---

⑨ $2x^2 - 8(3x+2) = 0$

Sol $2x^2 - 8(3x+2) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 24x - 16 = 0 \overset{\div 2}{\Longrightarrow} x^2 - 12x - 8 = 0$

$a = 1$ $b = -12$ $c = -8$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)} = \frac{+12 \pm \sqrt{144+32}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{176}}{2} = \frac{12 \pm 4\sqrt{11}}{2}$$

$$x = \frac{2(6 \pm 2\sqrt{11})}{2} = 6 \pm 2\sqrt{11}$$

$x = 6 \pm 2\sqrt{11} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} x = \begin{cases} 6+2\sqrt{11} \\ 6-2\sqrt{11} \end{cases}$ $\therefore S = \{6+2\sqrt{11}, 6-2\sqrt{11}\}$

H.W جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستخدام طريقة القانون العام (الدستور) .

① $x^2 - 4x - 5 = 0$ $S = \{-1, 5\}$	② $x^2 - 7x - 14 = 0$ $S = \left\{\frac{7+\sqrt{105}}{2}, \frac{7-\sqrt{105}}{2}\right\}$	③ $y^2 + 3y - 9 = 0$ $S = \left\{\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right\}$
④ $x^2 - 3x - 7 = 0$ $S = \left\{\frac{3+\sqrt{37}}{2}, \frac{3-\sqrt{37}}{2}\right\}$	⑤ $3y^2 - 12y = -3$ $S = \{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\}$	⑥ $5z^2 + 6z = 9$ $S = \left\{\frac{-3+3\sqrt{6}}{5}, \frac{-3-3\sqrt{6}}{5}\right\}$

ثانياً: المقدار المميز $[\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)]$

تعلمنا في الجزء الاول من هذه الدرس كيفية حل المعادلة بالقانون العام (الدستور) لايجاد الجذور الحقيقية للمعادلة . والان سوف نتطرق الى مميز المعادلة التربيعية الذي تكون بالصورة $ax^2 \pm bx \pm c = 0$ والذي يعطى بالقانون التالي $\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$ المميز وان نوع جذري المعادلة يتعين حسب نواتج المميز وكما يلي . (معنى جذور المعادلة): هي قيم x

ناتج المقدار المميز $\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$	نوع جذري المعادلة
❶ عدد يكون موجب ومربع (عدد تربيعي)	❶ للمعادلة جذران حقيقيان R ونسبيان Q (عدد كسري)
❷ عدد يكون موجب وليس مربع (عدد ليس تربيعياً)	❷ للمعادلة جذران حقيقيان R غير نسبيان (جذور)
❸ ناتج المقدار المميز يساوي صفر	❸ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان (جذر حقيقي واحد ويساوي $\frac{-(b)}{2(a)}$)
❹ ناتج المقدار المميز عدد سالب	❹ جذران غير حقيقيان (ليس للمعادلة حل في R)(مجموعة الحل في $R = \emptyset$)

ملاحظة: المقدار المميز هو ليس طريقة لحل المعادلة التربيعية وانما هو اسلوب نعرف من خلاله هل للمعادلة حل في R ام لا. و حسب الجدول اعلاه



مثال 2 جد جذور المعادلة اولاً ؟ ثم جد مجموعة الحل اذا كان ممكناً .

① نستخرج قيم المعاملات
② نعوض المعاملات في قانون المميز لمعرفة نوع جذري المعادلة
③ اذا كانت المعادلة لها حل نحلها

❶ $2x^2 + 3x - 2 = 0$

Sol $a = 2$ $b = 3$ $c = -2$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$

بما انه ناتج المقدار المميز عدد موجب ومربع . اذن . للمعادلة جذران حقيقيان ونسبيان . أي لها حل وسوف نحلها بالدستور . بنفس المعاملات اعلاه

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$= \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 5}{4} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} x = \begin{cases} \frac{-3+5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-3-5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \end{cases}$$

$$\therefore S = \left\{\frac{1}{2}, -2\right\}$$

نصفر المعادلة ونستخرج المعاملات

❷ $2x^2 + 3x = 5$

Sol $2x^2 + 3x - 5 = 0$

$a = 2$ $b = 3$ $c = -5$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$

بما انه ناتج المقدار المميز عدد موجب ومربع . اذن . للمعادلة جذران حقيقيان ونسبيان . أي لها حل وسوف نحلها بالدستور . بنفس المعاملات اعلاه

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(3)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{4} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} x = \begin{cases} \frac{-3+7}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{-3-7}{4} = \frac{-10}{4} = \frac{-5}{2} \end{cases}$$

$$\therefore S = \left\{1, \frac{-5}{2}\right\}$$

---

❸ $y^2 - 4y - 9 = 0$

Sol $a = 1$ $b = -4$ $c = -9$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-9) = 16 + 36 = 52$

2	52
2	26
13	13
	1

هنا الجذر يمكن تحليله

$\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

بما انه ناتج المقدار المميز عدد موجب وليس مربع . اذن . للمعادلة جذران حقيقيان غير نسبيان . أي لها حل وسوف نحلها بالدستور . بنفس المعاملات اعلاه

$$y = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{+4 \pm \sqrt{16+36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{13}}{2} = \frac{\cancel{2}(2 \pm \sqrt{13})}{\cancel{2}}$$

$$y = 2 \pm \sqrt{13} \xrightarrow{\text{نجزء العلامات}} y = \begin{cases} 2 + \sqrt{13} \\ 2 - \sqrt{13} \end{cases}$$

$$\therefore S = \{2 + \sqrt{13}, 2 - \sqrt{13}\}$$



④ $z^2 + 8z = -16$

Sol $z^2 + 8z + 16 = 0$

$a = 1$ $b = 8$ $c = 16$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

بما انه ناتج المقدار المميز يساوي صفر . اذن . للمعادلة جذر حقيقي واحد . أي لها حل وسوف نحلها بالدستور . بنفس المعاملات اعلاه

$$z = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$z = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(16)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

$z = -4$ $\quad \therefore S = \{-4\}$

او بطريقة ثانية

عندما يكون المقدار المميز يساوي صفر فقط . فأن للمعادله جذر حقيقي واحد ويساوي $z = \frac{-(b)}{2(a)}$

$$z = \frac{-(b)}{2(a)} = \frac{-(8)}{2(1)} = \frac{-8}{2} = -4$$

نلاحظ ان الناتج متساوي . ولكن هذه الطريقه تستخدم فقط اذا كان المقدار المميز يساوي صفر

⑤ $y^2 - 14y + 49 = 0$

Sol $a = 1$ $b = -14$ $c = 49$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (-14)^2 - 4(1)(49) = 196 - 196 = 0$

بما انه ناتج المقدار المميز يساوي صفر . اذن . للمعادلة جذر حقيقي واحد . أي لها حل في R وسوف نحلها بالدستور . بنفس المعاملات اعلاه

$$y = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)} = \frac{-(b) \pm \sqrt{0}}{2(a)}$$

$$y = \frac{-(b)}{2(a)} = \frac{-(-14)}{2(1)} = \frac{+14}{2} = 7 \Longrightarrow y = 7$$

$\therefore S = \{7\}$

⑥ $3x^2 - 7x + 6 = 0$

Sol $a = 3$ $b = -7$ $c = 6$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (-7)^2 - 4(3)(6) = 49 - 72 = -23$

بما انه ناتج المقدار المميز عدد سالب . اذن . ليس للمعادلة حل في R \ لا يوجد حل $S = \emptyset$ . . . . . #لا تعب روحك

❼ $2x^2 - 5x + 7 = 0$

Sol $a = 2$ $b = -5$ $c = 7$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(7) = 25 - 56 = -31$

بما انه ناتج المقدار المميز عدد سالب . اذن . ليس للمعادلة حل في R \ لا يوجد حل $S = \emptyset$ . . . . . . #لا تعب روحك

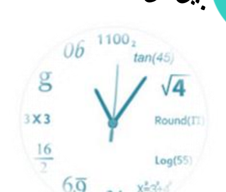
H.W حدد جذور المعادلة اولاً ؟ ثم جد مجموعة الحل اذا كان ممكناً ؟

❶ $x^2 + 4x = 5$ $S = \{-5, 1\}$	❷ $y^2 + 12 = -9y$ $S = \left\{\frac{-9+\sqrt{33}}{2}, \frac{-9-\sqrt{33}}{2}\right\}$	❸ $2x^2 + 8x + 8 = 0$ $S = \{-2\}$
❹ $y^2 - 2y + 1 = 0$ $S = \{1\}$	❺ $x^2 - 2x + 10 = 0$ $S = \emptyset$	❻ $4z^2 - 3z + 7 = 0$ $S = \emptyset$

سؤال \ متى تكون المعادلة ليس لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية R ؟ **جواب** \ بعد تطبيق قانون المميز ويكون الناتج عدد سالب

مثال 3 بين ان المعادلة $z^2 - 6z + 28 = 0$ ليس لها حل في R ؟

Sol $a = 1$ $b = -6$ $c = 28$



$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(28)$

$\Delta = 36 - 112$

$\Delta = -76$

بما انه ناتج المقدار المميز عدد سالب . اذن . ليس للمعادلة حل في R



مثال 4 بين ان المعادلة $2z^2 - 3z + 10 = 0$ ليس لها حل في R ؟

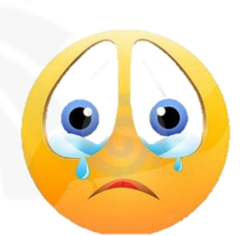
Sol $a = 2$ $b = -3$ $c = 10$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(10)$

$\Delta = 9 - 80$

$\Delta = -71$



بما انه ناتج المقدار المميز عدد سالب . اذن . ليس للمعادلة حل في R

H.W بين ان المعادلة $z^2 - 6z + 18 = 0$ ليس لها حل في R ؟



سؤال\ متى يكون للمعادلة جذرين متساويين ؟ جواب\ يكون للمعادلة جذرين متساويين عندما يكون ناتج المميز يساوي صفر

مثال 5 ما قيمة الثابت K التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+1)x+4=0$ متساويين ؟ ثم تحقق من الاجابة؟

Sol

يكون للمعادلة جذرين متساويين عندما يكون ناتج المميز يساوي صفر

نكتب قانون المميز مساوياً للصفر $\Delta=0$

$$(b)^2-4(a)(c)=0$$

نستخرج المعاملات من المعادلة . معامل x هو القوس

$a=1$, $b=-(k+1)$, $c=4$

نعوض المعاملات بقانون المميز . الاشارة السالبة تختفي عند نزول التربيع عليها

$$(-(k+1))^2-4(1)(4)=0$$

نحول الحد المطلق الى الطرف الثاني مع تغير الاشارة

$$(k+1)^2-16=0$$

$$(k+1)^2=16 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} \sqrt{(k+1)^2}=\sqrt{16}$$

$$k+1=\pm4 \Longrightarrow k=\pm4-1$$

عند الجذر يصبح الطرف الثاني موجب وسالب ثم نحول الحد المطلق الى الطرف الثاني مع تغير أشارته . ثم نأخذ الموجب و السالب . ونستخرج قيم k

$$k=\begin{cases}+4-1=3\\-4-1=-5\end{cases}$$

التحقيق

نعوض قيم $k=3$ و $k=-5$ في المعادلة الاصلية $x^2-(k+1)x+4=0$

عندما $k=3$

$$x^2-(3+1)x+4=0 \xrightarrow{\text{نجمع داخل القوس}} x^2-4x+4=0 \xrightarrow{\text{مربع كامل}} (x-2)^2=0 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} x-2=0 \Rightarrow x=2$$

معادلة تحل بطريقة المربع الكامل

عندما $k=-5$

$$x^2-(-5+1)x+4=0 \xrightarrow{\text{نجمع داخل القوس}} x^2-(-4)x+4=0 \Rightarrow x^2+4x+4=0 \xrightarrow{\text{مربع كامل}} (x+2)^2=0$$

$$\xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} x+2=0 \Rightarrow x=-2$$



سوف نستمر بالحل حسب هذه الخطوات



مثال 6 ما قيمة الثابت K التي تجعل جذري المعادلة $4y^2+25=(k-5)y$ متساويين ؟ ثم تحقق من الاجابة؟

نصفر المعادلة ونرتب الحدود

Sol $4y^2+25-(k-5)y=0 \xrightarrow{\text{نرتب الحدود}} 4y^2-(k-5)y+25=0$

يكون للمعادلة جذرين متساويين عندما يكون ناتج المميز يساوي صفر

$$\Delta=0 \Rightarrow (b)^2-4(a)(c)=0$$

$a=4$ $\quad b=-(k-5)$ $\quad c=25$

في هذه الأمثلة فقط يمكن تعويض الـ b بدون اشارة لأنها تربيع والتربيع يخفي الإشارة موجبة كانت ام سالبة

$$(k-5)^2-4(4)(25)=0$$

$$(k-5)^2-400=0$$

$$(k-5)^2=400 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} \sqrt{(k-5)^2}=\sqrt{400} \Rightarrow k-5=\pm20 \xrightarrow{\text{نحول الحد المطلق}} k=\pm20+5$$

$$k=\begin{cases}+20+5=25\\-20+5=-15\end{cases}$$

التحقيق نعوض قيم $k=25$ و $k=-15$ في المعادلة الاصلية $4y^2-(k-5)y+25=0$

عندما $k=25$

$$4y^2-(25-5)y+25=0 \xrightarrow{\text{نجمع داخل القوس}} 4y^2-20y+25=0 \xrightarrow{\text{مربع كامل}} (2y-5)^2=0 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} 2y-5=0 \Rightarrow y=\frac{5}{2}$$

عندما $k=-15$

$$-(-15-5)=-(-20)=+20$$

$$4y^2-(-15-5)y+25=0 \xrightarrow{\text{نجمع داخل القوس}} 4y^2+20y+25=0 \xrightarrow{\text{مربع كامل}} (2y+5)^2=0 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} 2y+5=0 \Rightarrow y=\frac{-5}{2}$$

مثال 7 ما قيمة الثابت K التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+4)x=-9$ متساويين ؟

نصفر المعادلة مع تغير الاشارة

Sol $x^2-(k+4)x+9=0$

يكون للمعادلة جذرين متساويين عندما يكون ناتج المميز يساوي صفر

$$\Delta=0 \Rightarrow (b)^2-4(a)(c)=0$$

$a=1$ $\quad b=-(k+4)$ $\quad c=9$

$$(k+4)^2-4(1)(9)=0$$

$$(k+4)^2-36=0 \xrightarrow{\text{نحول الحد المطلق}} (k+4)^2=36$$

$$(k+4)^2=36 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} \sqrt{(k+4)^2}=\sqrt{36} \Rightarrow k+4=\pm6 \xrightarrow{\text{نحول الحد المطلق}} k=\pm6-4$$

$$k=\begin{cases}+6-4=2\\-6-4=-10\end{cases}$$

هنا التحقيق غير مطلوب في السؤال

مثال 8 ما قيمة الثابت K التي تجعل جذري المعادلة $z^2 + 81 = (k+9)z$ متساويين ؟ ثم تحقق من الاجابة ؟

نصفر المعادلة ونرتب الحدود

Sol $z^2 + 81 - (k+9)z = 0 \xrightarrow{\text{نرتب الحدود}} z^2 - (k+9)z + 81 = 0$

يكون للمعادلة جذرين متساويين عندما يكون ناتج المميز يساوي صفر

$\Delta = 0 \Rightarrow (b)^2 - 4(a)(c) = 0$

$a = 1$ $\quad b = -(k+9)$ $\quad c = 81$

$(k+9)^2 - 4(1)(81) = 0 \quad (k+9)^2 - 324 = 0 \xrightarrow{\text{نحول الحد المطلق}} (k+9)^2 = 324$

$(k+9)^2 = 324 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} \sqrt{(k+9)^2} = \sqrt{324} \Rightarrow k+9 = \pm 18 \xrightarrow{\text{نحول الحد المطلق}} k = \pm 18 - 9$

$k = \begin{cases} +18 - 9 = 9 \\ -18 - 9 = -27 \end{cases}$

التحقيق نعوض قيم $k = 9$ و $k = -27$ في المعادلة الاصلية $z^2 - (k+9)z + 81 = 0$

عندما $k = 9$

$z^2 - (9+9)z + 81 = 0 \xrightarrow{\text{نجمع داخل القوس}} z^2 - 18z + 81 = 0 \xrightarrow{\text{مربع كامل}} (z-9)^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} z - 9 = 0 \Rightarrow z = 9$

عندما $k = -27$

$-(-27+9) = -(-18) = +18$

$z^2 - (-27+9)z + 81 = 0 \xrightarrow{\text{نجمع داخل القوس}} z^2 + 18z + 81 = 0 \xrightarrow{\text{مربع كامل}} (z+9)^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} z + 9 = 0 \Rightarrow z = -9$

H.W

❶ ما قيمة الثابت K التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+2)x + 36 = 0$ متساويين ؟ ثم تحقق من الاجابة ؟ \ $k = 10, -14$

❷ ما قيمة الثابت K التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 36 = (k-6)y$ متساويين ؟ ثم تحقق من الاجابة ؟ \ $k = 30, -18$

❸ ما قيمة الثابت K التي تجعل جذري المعادلة $z^2 + 16 = (k+4)z$ متساويين ؟ ثم تحقق من الاجابة ؟ \ $k = 4, -12$

❹ ما قيمة الثابت K التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+6)x + 49 = 0$ متساويين ؟ ثم تحقق من الاجابة ؟ \ $k = 8, -20$

❺ ما قيمة الثابت K التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+6)x + 9 = 0$ متساويين ؟ ثم تحقق من الاجابة ؟ \ $k = 0, -12$

عندما لا يذكر في السؤال طريقة لحل المعادلات من الدرجة الثانية ذات ثلاث حدود بالصيغة التالية. $ax^2 \pm bx \pm c = 0$

ماذا تفعل ؟ نطبق قانون المميز فاذا كانت النواتج كالاتي.

① ناتج المميز عدد موجب ومربع فالمعادلة تحل . بطريقة التجربة .

② ناتج المميز عدد موجب وليس مربع فالمعادلة تحل . بطريقة القانون العام (الدستور).

③ ناتج المميز يساوي صفر فالمعادلة تحل . بطريقة المربع الكامل .

(ويمكن ان تحل بالدستور)

④ ناتج المميز يساوي عدد سالب فالمعادلة . لا تحل في مرحلة الثالث متوسط. و تحل في مرحلة السادس اعدادي بالأعداد العقدية.



مسائل حياتية

❶ **العاب نارية:** في احدى المناسبات اطلقت مجموعة من الالعاب النارية عمودياً في الهواء ووصلت الى ارتفاع $140m$. احسب الزمن (t ثانية) الذي وصلت به الى هذا الارتفاع . من المعادلة التالية $5t^2 + 60t = 140$ ؟

Sol $[5t^2 + 60t = 140] \div 5 \Longrightarrow t^2 + 12t = 28 \xrightarrow{\text{نحول الحد المطلق}} t^2 + 12t - 28 = 0$

$a = 1$ $b = 12$ $c = -28$

سوف نحل المعادلة بالدستور لأنه الموضوع يخص الدستور



$$t = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$t = \frac{-(12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(-28)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 112}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{2} = \frac{-12 \pm 16}{2}$$

$$t = \frac{-12 \pm 16}{2} \Longrightarrow t = \begin{cases} \frac{-12 + 16}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-12 - 16}{2} = \frac{-28}{2} = -14 \text{ يهمل} \end{cases}$$

اذن الزمن هو $t = 2$ ثانية

وبطريقة ثانية: سوف نحل المعادلة بالتجربة . لان ناتج المميز يساوي عدد موجب ومربع \ حسب الملاحظة السابقة

$$t^2 + 12t - 28 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (t + 14)(t - 2) = 0$$

اما $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ او $t + 14 = 0 \Rightarrow t = -14$ يهمل

❷ **تجارة:** يحسب سامر سعر الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغ للربح ويبيعها للزبائن بمبلغ 120 الف دينار . اذا كانت p في المعادلة $p^2 - 30p + 225 = 0$ تمثل مبلغ ربح سامر في البدلة الواحدة بألوف الدنانير. فما سعر كلفة البدلة الواحدة ؟

Sol $p^2 - 30p + 225 = 0$

$a = 1$ $b = -30$ $c = 225$

سوف نجد قيمة من المعادلة بحلها بطريقة الدستور



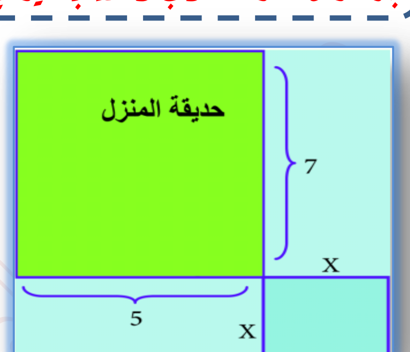
$$p = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$p = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(225)}}{2(1)} = \frac{+30 \pm \sqrt{900 - 900}}{2}$$

$$p = \frac{30 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ مقدار الربح}$$

بما انه سامر يبيع البدلة بمبلغ 120 ومقدار ربحه يكون 15 . اذن $120 - 15 = 105$ فيكون ثمن كلفة البدلة $= 105$

❸ **ممر حديقة**: اريد رصف ممر على جانبي حديقة منزل بالسيراميك. طول الحديقة $7m$ وعرضها $5m$ مساحة الرصف $45m^2$
جد عرض الممر المطلوب رصفة بالسيراميك؟



Sol

نفرض ان عرض الممر هو x فيكون مساحة الجزء الايمن من الممر $7x$ ومساحة الجزء الامامي $5x$
ومساحة زاوية الممر x^2 و مجموع مساحتي الرصف 45 ..... فتكون المعادلة

$$x^2 + 7x + 5x = 45$$

نجد x من المعادلة بحلها بطريقة الدستور

$$x^2 + 12x = 45 \xRightarrow{\text{نصفر المعادلة}} x^2 + 12x - 45 = 0$$

$a = 1$, $b = 12$, $c = -45$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-(12) \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{2} = \frac{-12 \pm 18}{2}$$

$$x = \frac{-12 \pm 18}{2} \Longrightarrow x = \begin{cases} \frac{-12+18}{2} = \frac{6}{2} = 3 \\ \frac{-12-18}{2} = \frac{-30}{2} = -15 \text{ يهمل} \end{cases}$$

ازن عرض الممر يكون $x = 3m$

فكر

اولاً تحدِ حدد جذور المعادلة اولاً ؟ ثم جد مجموعة الحل اذا كان ممكناً؟

❶ $x^2 + 8x = 10$

Sol $x^2 + 8x - 10 = 0$

$a = 1$, $b = 8$, $c = -10$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(-10) = 64 + 40 = 104$

بما انه ناتج المقدار المميز عدد موجب وليس مربع . ازن .
للمعادلة جذران حقيقيان غيرنسبيان. أي لها حل في R وسوف نحلها بالدستور

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(-10)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+40}}{2}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{104}}{2} = \frac{-8 \pm 2\sqrt{26}}{2} = \frac{2(-4 \pm \sqrt{26})}{2}$$

$$x = -4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow x = \begin{cases} -4 + \sqrt{26} \\ -4 - \sqrt{26} \end{cases} \quad \therefore S = \{-4 + \sqrt{26}, -4 - \sqrt{26}\}$$

❷ $3y^2 - 6y - 42 = 0$

Sol $[3y^2 - 6y - 42 = 0] \div 3 \Rightarrow y^2 - 2y - 14 = 0$

$a = 1$, $b = -2$, $c = -14$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-14) = 4 + 56 = 60$

بما انه ناتج المقدار المميز عدد موجب وليس مربع . ازن .
للمعادلة جذران حقيقيان غيرنسبيان. أي لها حل في R وسوف نحلها بالدستور

$$y = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$y = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-60)}}{2(1)} = \frac{+2 \pm \sqrt{4+56}}{2}$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{15}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{15})}{2}$$

$$y = 1 \pm \sqrt{15} \Rightarrow y = \begin{cases} 1 + \sqrt{15} \\ 1 - \sqrt{15} \end{cases} \quad \therefore S = \{1 + \sqrt{15}, 1 - \sqrt{15}\}$$



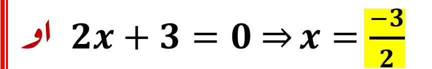
ثانياً أصحح الخطأ

قال سعد ان المعادلة $2x^2-3x-9=0$ ليس لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية(R).

اكتشف خطأ سعد و صححه؟

أووكي

Sol $2x^2-3x-9=0$



$\Delta=(b)^2-4(a)(c)$

$\Delta=(-3)^2-4(2)(-9)=9+72=81$

بما انه ناتج المقدار المميز عدد موجب و مربع . اذن . للمعادلة جذران حقيقيان نسبيان . أي لها حل في R وسوف نحلها بطريقة التجربة .

$2x^2-3x-9=0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x-3)(2x+3)=0$

اما $x-3=0 \Rightarrow x=3$

او $2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$

خطأ سعد هو في تحديد نوع جذور المعادلة حيث قال انها لا تحل في R

الصحيح هو ان المعادلة لها حل في R و مجموعة الحل لها $S=\left\{3,\frac{-3}{2}\right\}$

ثالثاً حس عددي

استعملت مروة المقدار المميز لكتابة جذري المعادلة $z^2-8z+16=0$ دون تحليلها .

فسر كيف استطاعت مروة كتابة جذري المعادلة ؟

Sol $z^2-8z+16=0$



$\Delta=(b)^2-4(a)(c) \Longrightarrow \Delta=(-8)^2-4(1)(16)=64-64=0$

بما انه ناتج المقدار المميز صفر . اذن للمعادلة جذر حقيقي واحد ويساوي $\left(\frac{-(b)}{2(a)}\right)$. سوف نستخدم هذه القانون لإيجاد الجذر بدون تحليل المعادلة

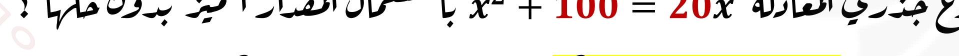
$z=\frac{-(b)}{2(a)}=\frac{-(-8)}{2(1)}=\frac{8}{2}=4$

اذن وجدنا جذر المعادلة دون تحليلها

رابعاً أكتب

نوع جذري المعادلة $x^2+100=20x$ باستعمال المقدار المميز بدون حلها ؟

Sol $x^2+100=20x \Rightarrow x^2+100-20x=0 \Rightarrow x^2-20x+100=0$



$\Delta=(b)^2-4(a)(c)$

$\Delta=(-20)^2-4(1)(10)=400-400=0$



بما انه ناتج المقدار المميز صفر . اذن للمعادلة جذر حقيقي واحد ويساوي $\left(\frac{-(b)}{2(a)}\right)$



الاختيارُ من متعدد Multiple Choice

الدرس [3-5] حل المعادلات بالقانون العام

Using General Law to solve the equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1. $x^2 - 3x - 4 = 0$
   a) $s = \{4, 1\}$ b) $s = \{4, -1\}$ ✓ c) $s = \{-4, 1\}$ d) $s = \{-4, -1\}$

2. $y^2 - 5y - 5 = 0$
   a) $s = \{\frac{3+5\sqrt{5}}{2}, \frac{3-5\sqrt{5}}{2}\}$ b) $s = \{\frac{5+3\sqrt{5}}{4}, \frac{3-5\sqrt{5}}{4}\}$
   c) $s = \{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\}$ ✓ d) $s = \{\frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}}{2}\}$

3. $2x^2 - 8x = -3$
   a) $s = \{\frac{4+\sqrt{10}}{2}, \frac{4-\sqrt{10}}{2}\}$ ✓ b) $s = \{\frac{2+\sqrt{10}}{2}, \frac{4+\sqrt{10}}{2}\}$
   c) $s = \{\frac{4+\sqrt{5}}{4}, \frac{4-\sqrt{5}}{4}\}$ d) $s = \{\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2-\sqrt{5}}{2}\}$

4. $3x^2 - 6(2x+1) = 0$
   a) $s = \{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\}$ b) $s = \{2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$
   c) $s = \{2+\sqrt{6}, 2-\sqrt{6}\}$ ✓ d) $s = \{6+\sqrt{6}, 6-\sqrt{6}\}$

حدِّد جذور المعادلة باستعمال المميز:

5. $x^2 - 6x - 7 = 0$
   a) جذران حقيقيان نسبيان ✓ b) جذران حقيقيان غير نسبيين
   c) جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$ d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \varnothing$)

6. $2y^2 - 3y - 8 = 0$
   a) جذران حقيقيان نسبيان b) جذران حقيقيان غير نسبيين ✓
   c) جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$ d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \varnothing$)

7. $8x^2 - 8x + 2 = 0$
   a) جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$ ✓ b) جذران حقيقيان غير نسبيين
   c) جذر حقيقي واحد $(\frac{-b}{2a})$ ✓ d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \varnothing$)

8. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $y^2 - (k+10)y + 16 = 0$ متساويين؟
   a) $k = 2, -18$ b) $k = -2, -18$ ✓ c) $k = 6, 18$ d) $k = -6, -18$

اعداد التربويين مصطفى محمد ◄ صفاء الكلابي



الدرس (3 – 6) حل المعادلات الكسرية من الدرجة الثانية

تعرفت سابقاً في الفصل الثاني الدرس 6 على كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وذلك بضرب البسط والمقام بـ $L.C.M$ (المضاعف المشترك الاصغر) للمقام . واليوم سوف نستخدم هذه الطريقة في حل معادلات كسرية (الفرق بين المعادلة والمقادير الجبرية هو وجود علامة المساواة في المعادلة) التي يكون في مقامها متغير وذلك بالتخلص من المقام . ثم نحلها باحدى الطرق الذي تعلمتها في هذه الفصل (التجربة، الدستور، المربع الكامل) .

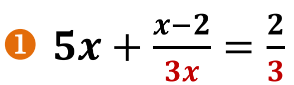
ملاحظة: عندما نتخلص من الكسور و تبقى معادلة من الدرجة الثانية ذات ثلاث حدود بالصيغة التالية. $ax^2 \pm bx \pm c = 0$

ماذا تفعل ؟ نطبق قانون المميز فاذا كانت النواتج كالاتي.

① ناتج المميز عدد موجب ومربع فالمعادلة تحل . بطريقة التجربة .

② ناتج المميز عدد موجب وليس مربع فالمعادلة تحل . بطريقة القانون العام (الدستور) .

③ ناتج المميز يساوي صفر فالمعادلة تحل . بطريقة المربع الكامل .



مثال 1 جد مجموعة الحل للمعادلات التالية ؟ ثم تحقق من صحة الحل ؟

① $5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}$

Sol $(3x)(\frac{5x}{1}) + (3x)\left(\frac{x-2}{3x}\right) = (3x)\left(\frac{2}{3}\right)$

$15x^2 + x - 2 = 2x$

$15x^2 + x - 2 - 2x = 0$

$15x^2 - x - 2 = 0$

نحلل المعادلة بالتجربة لان ناتج القدار المميز 121 وهو عدد موجب ومربع

$15x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (5x-2)(3x+1) = 0$

اما $5x - 2 = 0 \Rightarrow 5x = 2 \overset{\div 5}{\Rightarrow} x = \frac{2}{5}$

او $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \overset{\div 3}{\Rightarrow} x = \frac{-1}{3}$

والان سوف نتحقق من النواتج

① نظر الى البسط والمقام هل يوجد تبسيط ام لا ؟ اذا وجد نبسطه واذا لا ننتقل الى النقطة التالية .

② نضرب طرفي المعادلة في $L.C.M$ وهو حاصل ضرب العوامل المشتركة بأكبر اس وغير المشتركة

$L.C.M = (1)(3x) = 3x$

③ نصفر المعادلة بتحويل جميع الحدود من طرف الى الطرف الذي يحتوي على المتغير التربيعي مع مراعات تغيير الإشارات

④ نجمع المتغيرات المتشابهة مع بعضها

⑤ ثم نحقق من النواتج . بعد تعويض القيم في المعادلة الاصلية

اعداد التربويين مصطفى محمد ▸ صفاء الكلابي

لتحقيق: نعوض قيم $x = \frac{2}{5}$ و $x = \frac{-1}{3}$ في المعادلة الاصلية $5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}$ يجب ان يكون الطرف الاول يساوي الطرف الثاني

عندما $x = \frac{-1}{3}$

$$ط_1 = 5\left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{\frac{-1}{3} - 2}{3\left(\frac{-1}{3}\right)} = \frac{-5}{3} + \frac{\frac{-1-6}{3}}{-1} = \frac{-5}{3} + \frac{\frac{-7}{3}}{-1}$$

$$= \frac{-5}{3} + \left(\frac{-7}{3} \times \frac{-1}{1}\right) = \frac{-5}{3} + \frac{+7}{3} = \frac{-5+7}{3} = \frac{2}{3} = ط_2$$ ✓

عندما $x = \frac{2}{5}$

$$ط_1 = 5\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{\frac{2}{5} - 2}{3\left(\frac{2}{5}\right)} = 2 + \frac{\frac{2-10}{5}}{\frac{6}{5}} = 2 + \frac{\frac{-8}{5}}{\frac{6}{5}}$$

$$= 2 + \left(\frac{-8}{5} \times \frac{5}{6}\right) = 2 + \frac{-8}{6} = 2 + \frac{-4}{3} = \frac{6-4}{3} = \frac{2}{3} = ط_2$$ ✓

بعد التحقيق من القيم اذا كانت نواتج الطرف الاول متساوية مع نواتج الطرف الثاني نقوم بكتابة مجموعة الحل $S = \left\{\frac{2}{5}, \frac{-1}{3}\right\}$

---

② $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{4x^2}$

Sol نختصر بسط ومقام الطرف الثاني على 2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة في $L.C.M = 2x^2$

$$(2x^2)\left(\frac{1}{x}\right) + (2x^2)\left(\frac{1}{2}\right) = (2x^2)\left(\frac{3}{2x^2}\right)$$

$$2x + x^2 = 3 \xrightarrow{\text{نرتب و نحول}} x^2 + 2x - 3 = 0$$

نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي 16 وهو عدد موجب ومربع

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow$$

اما $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$ & او $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

لتحقيق: نعوض قيم $x = -3$ و $x = 1$ في المعادلة الاصلية $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{4x^2}$

عندما $x = 1$

$$ط_1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$ط_2 = \frac{6}{4(1)^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$ ✓

عندما $x = -3$

$$ط_1 = \frac{1}{-3} + \frac{1}{2} = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6}$$

$$ط_2 = \frac{6}{4(-3)^2} = \frac{6}{4(9)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$ ✓

بعد التحقيق من القيم اذا كانت نواتج الطرف الاول متساوية مع نواتج الطرف الثاني نقوم بكتابة مجموعة الحل $S = \{-3, 1\}$



ملاحظة: عندما يكون في الطرف الاول كسر واحد فقط وفي الطرف الثاني ايضا كسر واحد نستخدم طريقة الطرفين في الوسطين (المقص)

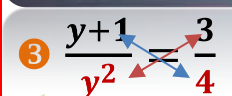
③ $\frac{y+1}{y^2}=\frac{3}{4}$

Sol $4(y+1)=3(y^2)$

$4y+4=3y^2 \xrightarrow{\text{نحول الطرف الاول الى الطرف الثاني}} 3y^2-4y-4=0$

نحلل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي **64** وهو عدد موجب و مربع

$3y^2-4y-4=0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (3y+2)(y-2)=0 \Rightarrow$ اما $3y+2=0 \Rightarrow y=-\frac{2}{3}$ او $y-2=0 \Rightarrow y=2$



التحقيق: نعوض قيم $y=2$ و $y=-\frac{2}{3}$ في المعادلة الاصلية $\frac{y+1}{y^2}=\frac{3}{4}$

عندما $y=-\frac{2}{3}$

$ط_1=\frac{-\frac{2}{3}+1}{(-\frac{2}{3})^2}=\frac{\frac{-2+3}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{3}\times\frac{9}{4}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

$ط_2=\frac{3}{4}$ ✓

عندما $y=2$

$ط_1=\frac{2+1}{(2)^2}=\frac{3}{4}$

$ط_2=\frac{3}{4}$ ✓

بعد التحقيق من القيم اذا كانت نواتج الطرف الاول متساوية مع نواتج الطرف الثاني نقوم بكتابة مجموعة الحل $S=\{\frac{-2}{3},2\}$

④ $\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{3y}{y+2}$

$\frac{3y(y+2)^2}{3(y+2)}=\frac{9(y+2)}{3(y+2)} \Rightarrow y(y+2)=3$

Sol $3y(y+2)^2=9(y+2) \xrightarrow{\div 3(y+2)} y(y+2)=3 \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} y^2+2y=3 \xrightarrow{\text{نحول}} y^2+2y-3=0$

نحلل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي **16** وهو عدد موجب و مربع

$y^2+2y-3=0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (y+3)(y-1)=0 \Rightarrow$ اما $y+3=0 \Rightarrow y=-3$ او $y-1=0 \Rightarrow y=1$

التحقيق: نعوض قيم $y=1$ و $y=-3$ في المعادلة الاصلية $\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{3y}{y+2}$

عندما $y=-3$

$ط_1=\frac{9}{(-3+2)^2}=\frac{9}{(1)^2}=\frac{9}{1}=9$

$ط_2=\frac{3(-3)}{-3+2}=\frac{-9}{-1}=9$ ✓

عندما $y=1$

$ط_1=\frac{9}{(1+2)^2}=\frac{9}{(3)^2}=\frac{9}{9}=1$

$ط_2=\frac{3(1)}{1+2}=1$ ✓

بعد التحقيق من القيم اذا كانت نواتج الطرف الاول متساوية مع نواتج الطرف الثاني نقوم بكتابة مجموعة الحل $S=\{1,-3\}$

⑤ $\frac{9x-14}{x-5} = \frac{x^2}{x-5}$

Sol $x^2(x-5) = (x-5)(9x-14) \xrightarrow{\div(x-5)} x^2 = 9x - 14 \xrightarrow{\text{نحول الطرف الثاني}} x^2 - 9x + 14 = 0$

نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي **25** وهو عدد موجب و مربع

$x^2 - 9x + 14 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x-7)(x-2) = 0 \Rightarrow$ اما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$ & او $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

التحقيق: نعوض قيم $x = 2$ و $x = 7$ في المعادلة الاصلية $\frac{9x-14}{x-5} = \frac{x^2}{x-5}$

عندما $x = 2$

ط$_1$ $= \frac{9(2)-14}{2-5} = \frac{18-14}{-3} = \frac{4}{-3}$

ط$_2$ $= \frac{(2)^2}{2-5} = \frac{4}{-3}$ ✓

عندما $x = 7$

ط$_1$ $= \frac{9(7)-14}{7-5} = \frac{63-14}{2} = \frac{49}{2}$

ط$_2$ $= \frac{(7)^2}{7-5} = \frac{49}{2}$ ✓

بعد التحقيق من القيم اذا كانت نواتج الطرف الاول متساوية مع نواتج الطرف الثاني نقوم بكتابة مجموعة الحل $S = \{7, 2\}$

⑥ $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$

Sol $\frac{3y}{4} - \frac{2}{4y} + \frac{1}{4} = 0$

نضرب طرفي المعادلة $L.C.M = 4y$

$(4y)\left(\frac{3y}{4}\right) - (4y)\left(\frac{2}{4y}\right) + (4y)\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

$3y^2 - 2 + y = 0 \xrightarrow{\text{نرتب الحدود}} 3y^2 + y - 2 = 0$

نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي **25** وهو عدد موجب ومربع

$3y^2 + y - 2 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (y+1)(3y-2) = 0 \Rightarrow$ اما $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$ & او $3y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$

التحقيق: نعوض قيم $y = \frac{2}{3}$ و $y = -1$ في المعادلة الاصلية $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$

عندما $y = \frac{2}{3}$

ط$_1$ $= \frac{3\left(\frac{2}{3}\right)}{4} - \frac{6}{12\left(\frac{2}{3}\right)} + \frac{2}{4} = \frac{2}{4} - \frac{6}{8} + \frac{1}{4}$

$= \frac{4-6+2}{8} = \frac{6-6}{8} = \frac{0}{8} = 0 =$ ط$_2$ ✓

عندما $y = -1$

ط$_1$ $= \frac{3(-1)}{4} - \frac{6}{12(-1)} + \frac{1}{4} = \frac{-3}{4} - \frac{6}{-12} + \frac{1}{4}$

$= \frac{-9+6+3}{12} = \frac{-9+9}{12} = \frac{0}{12} = 0 =$ ط$_2$ ✓

بعد التحقيق من القيم اذا كانت نواتج الطرف الاول متساوية مع نواتج الطرف الثاني نقوم بكتابة مجموعة الحل $S = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$

7 $\frac{1}{6y^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{y}$

نضرب طرفي المعادلة $L.C.M = 6y^2$

Sol $(6y^2)\frac{1}{6y^2}+(^{3}6y^2)\frac{1}{2}=(6y^2)\frac{1}{y}$

$1+3y^2=6y \xrightarrow{\text{نحول الطرف الثاني}} 3y^2-6y+1=0$

نحل المعادلة بالدستور لان ناتج المقدار المميز يساوي **24** وهو عدد موجب ليس مربع

نستخرج المعاملات ثم نعوضها بالقانون

$a=3$ $b=-6$ $c=1$

$$y=\frac{-(b)\pm\sqrt{(b)^2-4(a)(c)}}{2(a)}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\frac{6\pm\sqrt{36-12}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{24}}{6}=\frac{6\pm2\sqrt6}{6}=\frac{3\pm\sqrt6}{3}$$

$\therefore y=\frac{3+\sqrt6}{3},\frac{3-\sqrt6}{3}$

التحقيق: نعوض قيم $y=\frac{3+\sqrt6}{3}$ و $y=\frac{3-\sqrt6}{3}$ في المعادلة الاصلية $\frac{1}{6y^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{y}$

عندما $y=\frac{3+\sqrt6}{3}$

$$ط_1=\frac{1}{6\left(\frac{3+\sqrt6}{3}\right)^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6\left(\frac{9+6\sqrt6+6}{9}\right)}+\frac{1}{2}=\frac{1}{^{2}6\left(\frac{15+6\sqrt6}{_{3}9}\right)}+\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{30+12\sqrt6}{3}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{3(10+4\sqrt6)}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{10+4\sqrt6}\times\frac{10-4\sqrt6}{10-4\sqrt6}+\frac{1}{2}=\frac{10-4\sqrt6}{(10)^2-(4\sqrt6)^2}+\frac{1}{2}=\frac{10-4\sqrt6}{100-96}+\frac{1}{2}=\frac{10-4\sqrt6}{4}+\frac{1}{2}=\frac{10-4\sqrt6+2}{4}=\frac{12-4\sqrt6}{4}$$

$$=\frac{4(3-\sqrt6)}{4}=3-\sqrt6$$

$$ط_2=\frac{1}{\frac{3+\sqrt6}{3}}=\frac{3}{3+\sqrt6}\times\frac{3-\sqrt6}{3-\sqrt6}=\frac{3(3-\sqrt6)}{(3)^2-(\sqrt6)^2}=\frac{3(3-\sqrt6)}{9-6}=\frac{3(3-\sqrt6)}{3}=3-\sqrt6$$

✓

عندما $y=\frac{3-\sqrt6}{3}$

$$ط_1=\frac{1}{6\left(\frac{3-\sqrt6}{3}\right)^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6\left(\frac{9-6\sqrt6+6}{9}\right)}+\frac{1}{2}=\frac{1}{^{2}6\left(\frac{15-6\sqrt6}{_{3}9}\right)}+\frac{1}{2}=\frac{1}{\frac{30-12\sqrt6}{3}}+\frac{1}{2}=\frac{3}{3(10-4\sqrt6)}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{10-4\sqrt6}\times\frac{10+4\sqrt6}{10+4\sqrt6}+\frac{1}{2}=\frac{10+4\sqrt6}{(10)^2-(4\sqrt6)^2}+\frac{1}{2}=\frac{10+4\sqrt6}{100-96}+\frac{1}{2}=\frac{10+4\sqrt6}{4}+\frac{1}{2}=\frac{10+4\sqrt6+2}{4}=\frac{12+4\sqrt6}{4}$$

$$=\frac{4(3+\sqrt6)}{4}=3+\sqrt6$$

$$ط_2=\frac{1}{\frac{3-\sqrt6}{3}}=\frac{3}{3-\sqrt6}\times\frac{3+\sqrt6}{3+\sqrt6}=\frac{3(3+\sqrt6)}{(3)^2-(\sqrt6)^2}=\frac{3(3+\sqrt6)}{9-6}=\frac{3(3+\sqrt6)}{3}=3+\sqrt6$$

✓

بعد التحقيق من القيم اذا كانت نواتج الطرف الاول متساوية مع نواتج الطرف الثاني نقوم بكتابة مجموعة الحل $S=\left\{\frac{3+\sqrt6}{3},\frac{3-\sqrt6}{3}\right\}$



H.W جد مجموعة الحل للمعادلات التالية وتحقق من صحة الحل .

① $\frac{x+4}{2}=\frac{-3}{2x}$ $S=\{-3,-1\}$	② $\frac{1}{y^2-6}=\frac{2}{y+3}$ $S=\left\{\frac{-5}{2},3\right\}$	③ $\frac{9x+22}{x^2}=1$ $S=\{-2,11\}$
④ $\frac{y}{2}-\frac{7}{5}=\frac{3}{10y}$ $S=\left\{\frac{-1}{5},3\right\}$	⑤ $\frac{4}{6x^2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{x}$ $S=\{1,2\}$	⑥ $\frac{6x}{5}=\frac{5}{6x}$ $S=\left\{\frac{-5}{6},\frac{5}{6}\right\}$
⑦ $\frac{z+4}{z^2}=\frac{1}{2}$ $S=\{-2,4\}$		



جد مجموعة الحل للمعادلات التالية ؟

① $\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$

فرق بين مربعين

نبسط بعض الحدود ثم نتخلص من المقامات بضرب المعادلة بـ $L.C.M = (x-3)(x+3)$

Sol $\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{(x-3)(x+3)}$

$$(x-3)(x+3)\left(\frac{x}{x-3}\right)+(x-3)(x+3)\left(\frac{4x}{x+3}\right)=(x-3)(x+3)\left(\frac{18}{(x-3)(x+3)}\right)$$

$$x(x+3)+4x(x-3)=18 \xRightarrow{\text{نفتح الاقواس}} x^2+3x+4x^2-12x=18 \xRightarrow{\text{نبسط}} 5x^2-9x-18=0$$

نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي **441** وهو عدد موجب ومربع

$$5x^2-9x-18=0 \xRightarrow{\text{بالتجربة}} (x-3)(5x+6)=0 \Rightarrow \text{اما } x-3=0 \Rightarrow x=3 \ \& \ \text{او } 5x+6=0 \Rightarrow x=\frac{-6}{5}$$

ملاحظة: عندما لا يطلب منك التحقيق في السؤال : يجب ان ننظر الى القيم الناتجة بحيث تكون هذه القيم لا تجعل احد المقامات **صفر** . نستبعد هذه القيمة لان لا يمكن ان يقسم على صفر.

مثل عندما $x=3$ فأن المقدار التالي يصبح $\frac{x}{x-3} \Rightarrow \frac{3}{3-3} \Rightarrow \frac{3}{0}$ وهذه لا يمكن...... اذن نهمل هذه القيمة للx

اما القيمة الثانية فأنها لا تقسم على صفر . اذن لا تهمل. فتكون مجموعة الحل $S=\left\{\frac{-6}{5}\right\}$



❷ $\frac{12}{y^2-16}+\frac{6}{y+4}=2$

نبسط بعض الحدود ثم نتخلص من المقامات بضرب المعادلة بـ $(y-4)(y+4)=L.C.M$

فرق بين مربعين

Sol $\frac{12}{(y-4)(y+4)}+\frac{6}{y+4}=2$

$$(y-4)(y+4)\left(\frac{12}{(y-4)(y+4)}\right)+(y-4)(y+4)\left(\frac{6}{y+4}\right)=(y-4)(y+4)(2)$$

$$12+6(y-4)=2(y-4)(y+4)\xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}}12+6y-24=2(y^2-16)\xrightarrow{\text{نبسط}}6y-12=2y^2-32\xrightarrow{\text{نحول الطرف الاول}}$$

$$2y^2-32-6y+12=0\xrightarrow{\text{نبسط و نرتب}}[2y^2-6y-20=0]\div 2\Rightarrow y^2-3y-10=0$$

نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي **49** وهو عدد موجب و مربع

$$y^2-3y-10=0\xrightarrow{\text{بالتجربة}}(y-5)(y+2)=0\Rightarrow \text{اما } y-5=0\Rightarrow y=5\ \&\ \text{او } y+2=0\Rightarrow y=-2$$

∵ لا توجد قيمة من القيم تجعل المقام صفر ∴ تكون مجموعة الحل $S=\{5,-2\}$

❸ $\frac{y-5}{y+5}-\frac{y+5}{y-5}=\frac{4y^2-24}{y^2-25}$

نبسط بعض الحدود ثم نتخلص من المقامات بضرب المعادلة بـ $(y-5)(y+5)=L.C.M$

Sol $\frac{y-5}{y+5}-\frac{y+5}{y-5}=\frac{4y^2-24}{(y-5)(y+5)}$

$$(y-5)(y+5)\left(\frac{y-5}{y+5}\right)-(y-5)(y+5)\left(\frac{y+5}{y-5}\right)=(y-5)(y+5)\left(\frac{4y^2-24}{(y-5)(y+5)}\right)$$

$$(y-5)(y-5)-(y+5)(y+5)=4y^2-24\Rightarrow (y-5)^2-(y+5)^2=4y^2-24$$

$$\xrightarrow{\text{نفتح المربع الكامل}}(y^2-10y+25)-(y^2+10y+25)=4y^2-24\xrightarrow{\text{نختصر}}y^2-10y+25-y^2-10y-25=4y^2-24$$

$$\xrightarrow{\text{نبسط و نرتب}}-20y=4y^2-24\Rightarrow 4y^2+20y-24=0\xrightarrow{\div 4}y^2+5y-6=0$$

$$y^2+5y-6=0\xrightarrow{\text{بالتجربة}}(y+6)(y-1)=0\Rightarrow \text{اما } y+6=0\Rightarrow y=-6\quad \text{او } y-1=0\Rightarrow y=1$$

∵ لا توجد قيمة من القيم تجعل المقام صفر ∴ تكون مجموعة الحل $S=\{-6,1\}$





نبسط بعض الحدود ثم نتخلص من المقامات بضرب المعادلة
ب$(x-1)(x+1) = L.C.M$

لا يحلل وتعرفنا على السبب سابقا

④ $\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x-1}=\frac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$

Sol $\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x-1}=\frac{8+7x+3x^2}{(x-1)(x+1)}$

$$(x-1)(x+1)\left(\frac{2x}{x+1}\right)+(x-1)(x+1)\left(\frac{3x}{x-1}\right)=(x-1)(x+1)\left(\frac{8+7x+3x^2}{(x-1)(x+1)}\right)$$

$$2x(x-1)+3x(x+1)=8+7x+3x^2 \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} 2x^2-2x+3x^2+3x=8+7x+3x^2 \xrightarrow{\text{نبسط}}$$

$$5x^2+x=8+7x+3x^2 \xrightarrow{\text{نحول الطرف الثاني}} 5x^2+x-8-7x-3x^2=0 \Rightarrow [2x^2-6x-8=0]\div 2 \Rightarrow$$

نحل المعادلة بالتجربه لان ناتج المقدار المميز يساوي 25 وهو عدد موجب و مربع

$$x^2-3x-4=0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x-4)(x+1)=0 \Rightarrow \text{اما } x-4=0 \Rightarrow x=4 \ \& \ \text{او } x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$\because$ عندما $x=-1$ تجعل مقام المقدار $\frac{2x}{x+1}=\frac{-2}{-1+1}=\frac{-2}{0}$ يساوي صفر لذلك نهملها $\therefore$ تكون مجموعة الحل $S=\{4\}$

نبسط بعض الحدود ثم نتخلص من المقامات بضرب المعادلة
ب$(x+4)(x-3) = L.C.M$

⑤ $\frac{6-x}{x^2+x-12}-\frac{2}{x+4}=1$

Sol $\frac{6-x}{(x+4)(x-3)}-\frac{2}{x+4}=1$

$$(x+4)(x-3)\left(\frac{6-x}{(x+4)(x-3)}\right)-(x+4)(x-3)\left(\frac{2}{x+4}\right)=(x+4)(x-3)(1)$$

$$6-x-2(x-3)=(x+4)(x-3) \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} 6-x-2x+6=x^2+x-12 \xrightarrow{\text{نبسط}}$$

$$12-3x=x^2+x-12 \xrightarrow{\text{نحول الطرف الاول}} x^2+x-12-12+3x=0 \Rightarrow x^2+4x-24=0$$

نحل المعادلة بالدستور لان ناتج المقدار المميز يساوي 112 وهو عدد موجب ليس مربع

نستخرج المعاملات ثم نعوضها بالقانون

$a=1$ $\quad b=4$ $\quad c=-24$

$$x=\frac{-(b)\pm\sqrt{(b)^2-4(a)(c)}}{2(a)}=\frac{-(4)\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(-24)}}{2(1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16+96}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{112}}{2}=\frac{-4\pm4\sqrt{7}}{2}$$

$$=-2\pm2\sqrt{7} \quad \therefore x=-2+2\sqrt{7}, -2-2\sqrt{7}$$

$\because$ لا توجد قيمة من القيم تجعل المقام صفر $\therefore$ تكون مجموعة الحل $S=\{-2+2\sqrt{7}, -2-2\sqrt{7}\}$



⑥ $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x-3} = 1$

لا يوجد تبسيط تتخلص من المقامات بضرب المعادلة
ب $L.C.M = (x-4)(x-3)$

Sol

$(x-4)(x-3)\left(\frac{3}{x-4}\right) - (x-4)(x-3)\left(\frac{2}{x-3}\right) = (x-4)(x-3)(1)$

$3(x-3) - 2(x-4) = (x-4)(x-3) \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} 3x - 9 - 2x + 8 = x^2 - 7x + 12 \xrightarrow{\text{نبسط}}$

$x - 1 = x^2 - 7x + 12 \xrightarrow{\text{نحول الطرف الاول}} x^2 - 7x + 12 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 13 = 0$

نحل المعادلة بالدستور لان ناتج المقدار المميز يساوي **12** وهو عدد موجب ليس مربع

نستخرج المعاملات ثم نعوضها بالقانون

$a = 1$ $b = -8$ $c = 13$

$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(1)(13)}}{2(1)} = \frac{8 \pm \sqrt{64-52}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$= 4 \pm \sqrt{3} \quad \therefore x = 4 + \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}$

$\because$ لا توجد قيمة من القيم تجعل المقام صفر $\therefore$ تكون مجموعة الحل $S = \{4 + \sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}\}$

⑦ $\frac{2y}{y+2} + \frac{y}{2-y} = \frac{7}{y^2-4}$

لابد من توحيد رموز الحدود
$2 - y = -(y-2)$

نبسط بعض الحدود ثم نتخلص من المقامات بضرب المعادلة
ب $L.C.M = (y-2)(y+2)$

Sol

$\frac{2y}{y+2} + \frac{y}{2-y} = \frac{7}{(y-2)(y+2)}$

$\frac{2y}{y+2} + \frac{y}{-(y-2)} = \frac{7}{(y-2)(y+2)} \Rightarrow \frac{2y}{y+2} - \frac{y}{(y-2)} = \frac{7}{(y-2)(y+2)}$

$(y-2)(y+2)\left(\frac{2y}{y+2}\right) - (y-2)(y+2)\left(\frac{y}{(y-2)}\right) = (y-2)(y+2)\left(\frac{7}{(y-2)(y+2)}\right)$

$2y(y-2) - y(y+2) = 7 \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} 2y^2 - 4y - y^2 - 2y = 7 \xrightarrow{\text{نبسط و نحول}} y^2 - 6y - 7 = 0$

نحل المعادلة بالتجربه لان ناتج المقدار المميز يساوي **64** وهو عدد موجب و مربع

$y^2 - 6y - 7 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (y-7)(y+1) = 0 \Rightarrow$ اما $y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$ & او $y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$

$\because$ لا توجد قيمة من القيم تجعل المقام صفر $\therefore$ تكون مجموعة الحل $S = \{7, -1\}$



8 $\frac{2}{x+2}-\frac{x}{2-x}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$

نبسط بعض الحدود ثم نتخلص من المقامات بضرب المعادلة
ب $L.C.M = (x-2)(x+2)$

لابد من توحيد رموز الحدود
$2-x=-(x-2)$

Sol $\frac{2}{x+2}-\frac{x}{2-x}=\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}$

$\frac{2}{x+2}-\frac{x}{-(x-2)}=\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)} \Rightarrow \frac{2}{x+2}+\frac{x}{(x-2)}=\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}$

$(x-2)(x+2)\left(\frac{2}{x+2}\right)+(x-2)(x+2)\left(\frac{x}{(x-2)}\right)=(x-2)(x+2)\left(\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}\right)$

$2(x-2)+x(x+2)=x^2+4 \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} 2x-4+x^2+2x=x^2+4 \xrightarrow{\text{نبسط و نحول}}$

$4x-4+x^2=x^2+4 \xrightarrow{\text{نحول الطرف الثاني}} 4x-4+x^2-x^2-4=0 \xRightarrow{\text{نجمع}} 4x-8=0 \Rightarrow [4x=8]\div 4 \Rightarrow \therefore x=2$

لكن عندما نعوض $x=2$ في المقدار $\frac{x}{2-x}=\frac{2}{2-2}=\frac{2}{0}$ تجعل المقام يساوي صفر وهذه لا يمكن $\therefore$ تكون مجموعة الحل $S=\emptyset$ مجموعة خالية

H.W جد مجموعة الحل للمعادلات التالية .

1 $\frac{y-4}{y+2}-\frac{2}{y-2}=\frac{17}{y^2-4}$ $S=\{4-\sqrt{29},4+\sqrt{29}\}$	**2** $\frac{9}{x^2-x-6}-\frac{5}{x-3}=1$ $S=\{-5,1\}$	**3** $\frac{4+8y}{y^2-9}+\frac{6}{y-3}=3$ $S=\left\{\frac{-7}{3},7\right\}$	**4** $\frac{4}{x-5}-\frac{3}{x-2}=1$ $S=\{4-\sqrt{13},4+\sqrt{13}\}$

مسائل حياتية

1 **تحفيات**: اذا كان ثمن شراء التحفيه الواحدة $2x+3$ الف دينار و ثمن شراء ست تحفيات x^2+3x-1 الف دينار فاذا كانت نسبة ثمن التحفيه الواحدة الى ثمن الست تحفيات $\frac{1}{3}$. فما ثمن شراء التحفيه الواحدة ؟



Sol $\frac{\text{ثمن تحفية واحدة}}{\text{ثمن ست تحفيات}}=\frac{1}{3}$

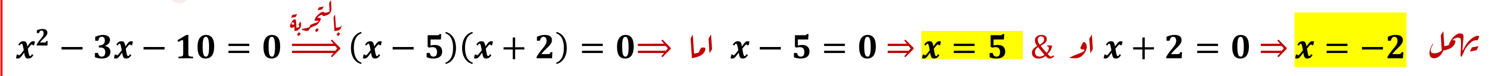
$\frac{2x+3}{x^2+3x-1}=\frac{1}{3}$

$x^2+3x-1=3(2x+3) \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} x^2+3x-1=6x+9$

$\xrightarrow{\text{نحول الطرف الثاني}} x^2+3x-1-6x-9=0 \xRightarrow{\text{نبسط}} x^2-3x-10=0$



نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي 49 وهو عدد موجب و مربع



$x^2-3x-10=0 \xRightarrow{\text{بالتجربة}} (x-5)(x+2)=0 \Rightarrow$ اما $x-5=0 \Rightarrow x=5$ & او $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ يهمل

$\therefore$ ثمن تحفيه واحده هو $2x+3=2(5)+3=10+3=13$ الف دينار



❷ **رياضة**: اراد راكب دراجة قطع مسافة $60\ km$ بين مدينتين A,B بسرعة معينة ولو زادت سرعته بمقدار $10\ km/h$ لتمكن من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الاول . **جد سرعته الاولى ؟**



ملاحظة: الزمن $=\frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$ قانون للحفظ

نفرض السرعة الاولى $= x$ فيكون الزمن الاول $=\frac{60}{x}$ و السرعة الثانية $= x+10$ فيكون الزمن الثاني $=\frac{60}{x+10}$

نكون المعادلة من خلال فرق الزمن الاول عن الزمن الثاني بساعة واحدة

$1 =$ الزمن الاول $-$ الزمن الثاني

$$\frac{60}{x}-\frac{60}{x+10}=1$$

تتخلص من المقامات بضرب المعادلة بـ $x(x+10) = L.C.M$

$$x(x+10)\left(\frac{60}{x}\right)-x(x+10)\left(\frac{60}{x+10}\right)=x(x+10)(1)$$

$$60(x+10)-60x=x^2+10x \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} 60x+600-60x=x^2+10x \xrightarrow{\text{نحول الطرف الاول}} x^2+10x-600=0$$



نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي 2500 وهو عدد موجب و مربع

$$x^2+10x-600=0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x+30)(x-20)=0$$

اما $x+30=0 \Rightarrow x=-30$ يهمل

او $x-20=0 \Rightarrow x=20$

$\therefore$ السرعة الاولى هي $x=20\ km/h$



③ **نقل مسافرين**: تقطع طائرة الخطوط الجوية العراقية المسافة $350\ km$ بين مدينة بغداد واربيل بسرعة معينة ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار $100 km/h$ لتمكنت من قطع هذه المسافة بزمن يقل 12 دقيقة عن الزمن الاول. جد سرعتها الأولى تقريبياً؟





الزمن $= \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$ ، حيث المسافة ثابتة $350\ km$

نفرض السرعة الاولى $= x$ فيكون الزمن الاول $= \frac{350}{x}$ و السرعة الثانية $= x + 100$ فيكون الزمن الثاني $= \frac{350}{x+100}$

نكون المعادلة من خلال فرق الزمن الاول عن الزمن الثاني 12 دقيقة

الزمن الاول − الزمن الثاني $= 12$دقيقة

ملاحظة: في حل المسائل يجب توحيد الوحدات فنحول الزمن من الدقائق الى الساعات \ ساعة $12 = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$ دقيقة

الزمن الاول − الزمن الثاني $= \frac{1}{5}$ $\overset{\text{نعوض}}{\Longrightarrow}$ $\frac{350}{x} - \frac{350}{x+100} = \frac{1}{5}$

نتخلص من المقامات بضرب المعادلة ب$5x(x+100) = L.C.M$

$$5x(x+100)\left(\frac{350}{x}\right) - 5x(x+100)\left(\frac{350}{x+100}\right) = 5x(x+100)\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$5(350)(x+100) - 5x(350) = x(x+100) \overset{\text{نفتح الاقواس}}{\Longrightarrow} 1750x + 175000 - 1750x = x^2 + 100x \overset{\text{نحول}}{\Longrightarrow}$$

$$x^2 + 100x - 175000 = 0$$

نحل المعادلة بالدستور لان ناتج المقدار المميز يساوي 710000 وهو عدد موجب ليس مربع

نستخرج المعاملات ثم نعوضها بالقانون

$a = 1$ $\quad b = 100$ $\quad c = -175000$

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)} = \frac{-(100) \pm \sqrt{(100)^2 - 4(1)(-175000)}}{2(1)} = \frac{-100 \pm \sqrt{10000 + 700000}}{2}$$

$$= \frac{-100 \pm \sqrt{710000}}{2} = \frac{-100 \pm 100\sqrt{71}}{2} = -50 \pm 50\sqrt{71}$$

$\sqrt{71} \approx 8$

اما $x = -50 + 50\sqrt{71} = -50 + 50(8) \approx -50 + 400 \approx 350$

او $x = -50 - 50\sqrt{71} \approx -450$ يهمل

$\therefore$ السرعة الاولى $x \approx 350\ km/h$



❹ **سباق**: شارك نوفل في سباق ثلاثي. وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري واستغرق ساعتين لإنهاء السباق كما موضح في الجدول المجاور على اعتبار x تعبر عن معدل سرعته في السباحة. **جد معدل سرعته التقريبية في سباق السباحة؟**

الزمن	السرعة km/h	المسافة km	نوع الرياضة
t_s	x	$d_s = 1$	السباحة
t_b	$5x$	$d_b = 20$	الدراجات
t_r	$x+4$	$d_r = 4$	الجري

ملاحظة: استعمل معادلة الزمن الاجمالي الذي استغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة وهي:

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

Sol

باستخدام المعادلة $T(x) = t_s + t_s + t_r$ نجد سرعته بالسباحة. حيث الزمن الكلي $T(x) = 2$

ومن خلال القانون $\text{الزمن} = \dfrac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$ نجد زمن كل رياضة ثم نعوضه بالمعادلة.

$$t_s = \frac{1}{x} \text{ و } t_b = \frac{20}{5x} \text{ و } t_r = \frac{4}{x+4} \xrightarrow{\text{نعوضهم بالمعادلة}} 2 = \frac{1}{x} + \frac{20}{5x} + \frac{4}{x+4} \Rightarrow 2 = \frac{1}{x} + \frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\cancel{5}x} + \frac{4}{x+4}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x} + \frac{4}{x+4} = 2 \xrightarrow{\text{نجمع الكسور المتشابهة}} \frac{5}{x} + \frac{4}{x+4} = 2$$

تتخلص من المقامات بضرب المعادلة ب $x(x+4) = L.C.M$

$$\cancel{x}(x+4)\left(\frac{5}{\cancel{x}}\right) + x\cancel{(x+4)}\left(\frac{4}{\cancel{x+4}}\right) = x(x+4)(2) \overset{\text{نبسط}}{\Rightarrow} 5(x+4) + 4x = 2x(x+4) \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}}$$

$$5x + 20 + 4x = 2x^2 + 8x \overset{\text{نجمع}}{\Rightarrow} 9x + 20 = 2x^2 + 8x \xrightarrow{\text{نحول الطرف الاول}} 2x^2 - x - 20 = 0$$

$a = 2$ $b = -1$ $c = -20$

سوف نحل المعادلة بالدستور لان المقدار المميز يساوي 161

$$x = \frac{-(b) \pm \sqrt{(b)^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-20)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+160}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{161}}{4}$$

$\sqrt{161}$ يساوي تقريباً 13

$$x \approx \frac{1 \pm 13}{4} \Longrightarrow x \approx \begin{cases} \dfrac{1+13}{4} \approx \dfrac{14}{4} \approx \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1-13}{4} \approx \dfrac{-12}{4} \approx \dfrac{-6}{2} \text{ يهمل} \end{cases}$$

∴ معدل سرعته بالسباحة تقريباً هو $x \approx \frac{7}{2} \, km/h$



فكر

اولاً تحدِ

جد مجموعة الحل للمعادلة التالية ؟

نبسط بعض الحدود ثم نتخلص من المقامات بضرب المعادلة

ب $(x-5)(x+5) = L.C.M$

$$\frac{3}{x+5} + \frac{4}{5-x} = \frac{x^2-15x+14}{x^2-25}$$

$5 - x = -(x-5)$

Sol
$$\frac{3}{x+5} - \frac{4}{(x-5)} = \frac{x^2-15x+14}{(x-5)(x+5)}$$

$$(x-5)(x+5)\left(\frac{3}{x+5}\right) - (x-5)(x+5)\left(\frac{4}{(x-5)}\right) = (x-5)(x+5)\left(\frac{x^2-15x+14}{(x-5)(x+5)}\right)$$

$$3(x-5) - 4(x+5) = x^2 - 15x + 14 \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} 3x - 15 - 4x - 20 = x^2 - 15x + 14 \xrightarrow{\text{نبسط}}$$

$$-x - 35 = x^2 - 15x + 14 \xrightarrow{\text{نحول الطرف الاول}} x^2 - 15x + 14 + x + 35 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 0$$

نحلل المعادلة بالمربع الكامل لان ناتج المقدار المميز يساوي **0**

$$x^2 - 14x + 49 = 0 \xrightarrow{\text{بالمربع الكامل}} (x-7)^2 = 0 \xrightarrow{\text{جذر الطرفين}} \sqrt{(x-7)^2} = \sqrt{0} \Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$$

∵ لا توجد قيم تجعل المقام يساوي صفر ∴ تكون مجموعة الحل $S = \{7\}$

ثانياً اصحح الخطأ

استعمل نمير المقدار المميز لبيان جذور المعادلة $\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1$ فقال نمير ان للمعادلة جذرين نسبيين و حقيقيين . اكتشف خطأ نمير و صححه ؟

Sol
$$\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1 \xrightarrow{\text{نضرب الكسرين}} \frac{2}{(x-7)(x-1)} = \frac{1}{1}$$

$$(x-7)(x-1) = 2 \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} x^2 - 8x + 7 = 2 \xrightarrow{\text{نحول}} x^2 - 8x + 7 - 2 = 0 \xrightarrow{\text{نجمع}} x^2 - 8x + 5 = 0$$

$\Delta = (b)^2 - 4(a)(c)$ نكتب قانون المميز

نعوض المعاملات بالقانون

$a = 1$ $b = -8$ $c = 5$

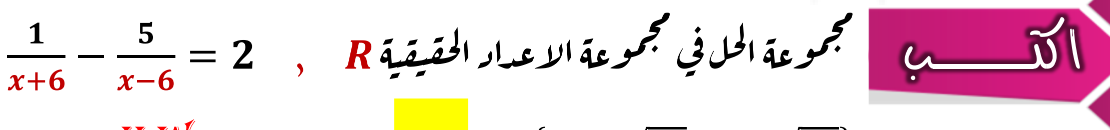
$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(5) = 64 - 20$

$\Delta = 44$

∵ ناتج المقدار المميز عدد موجب وليس مربع ∴ يكون للمعادلة جذرين حقيقين غير نسبين

خطأ نمير هو في كتابة نوع جذري المعادلة حيث كتب ان للمعادلة جذرين حقيقين نسبيين

ثالثاً اكتب



مجموعة الحل في مجموعة الاعداد الحقيقية R ، $\frac{1}{x+6} - \frac{5}{x-6} = 2$

H.W

ans: $S = \{-1+\sqrt{19}, -1-\sqrt{19}\}$



Multiple Choice الاختيارُ من متعدد

الدرس [3-6] حل المعادلات الكسرية

Solving the Rational Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

1. $\frac{2}{12x^2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4x}$ a) $s = \{2, \frac{1}{2}\}$ ✓b) $s = \{-2, \frac{1}{2}\}$ c) $s = \{2, \frac{-1}{2}\}$ d) $s = \{-2, \frac{-1}{2}\}$
2. $\frac{5}{6} - \frac{7}{6y} + \frac{y}{3} = 0$ ✓a) $s = \{1, \frac{-7}{2}\}$ b) $s = \{-1, \frac{-7}{2}\}$ c) $s = \{1, \frac{7}{2}\}$ d) $s = \{-1, \frac{7}{2}\}$
3. $\frac{8x}{5} = \frac{5}{8x}$ a) $s = \{\frac{5}{8}, \frac{-8}{5}\}$ b) $s = \{\frac{5}{8}, \frac{8}{5}\}$ ✓c) $s = \{\frac{5}{8}, \frac{-5}{8}\}$ d) $s = \{\frac{8}{5}, \frac{-8}{5}\}$
4. $\frac{1 + 2y}{3y + 9} = \frac{y}{2}$ a) $s = \{1, \frac{1}{3}\}$ b) $s = \{-1, \frac{1}{3}\}$ c) $s = \{2, \frac{1}{3}\}$ ✓d) $s = \{-2, \frac{1}{3}\}$
5. $\frac{16x - 64}{x^2} = 1$ a) $x = -8$ ✓b) $x = 8$ c) $x = -6$ d) $x = 6$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية:

6. $\frac{2}{x - 2} - \frac{3}{x - 1} = 1$
   a) $s = \{2 + \sqrt{7},\ 2 - \sqrt{7}\}$ ✓b) $s = \{1 + \sqrt{3},\ 1 - \sqrt{3}\}$
   c) $s = \{1 + \sqrt{7},\ 1 - \sqrt{7}\}$ d) $s = \{2 + \sqrt{3},\ 2 - \sqrt{3}\}$
7. $\frac{y - 6}{y + 6} - \frac{y + 6}{y - 6} = \frac{24y^2 + 6}{y^2 - 36}$ a) $y = -\frac{1}{3}$ ✓b) $y = -\frac{1}{2}$ c) $y = \frac{1}{3}$ d) $y = -\frac{1}{3}$
8. $\frac{x}{x + 3} - \frac{x}{x - 3} = \frac{x^2 + 12x + 81}{x^2 - 9}$ ✓a) $x = -9$ b) $x = 9$ c) $x = -8$ d) $x = 8$
9. $\frac{3y}{y - 4} + \frac{y}{y - 2} = \frac{5y^2 - 4y + 8}{y^2 - 6y + 8}$ a) $s = \{4, -2\}$ ✓b) $s = \{-4, -2\}$ c) $s = \{-4, 2\}$ d) $s = \{4, 2\}$



الدرس (3 – 7)

خطة حل المسألة (كتابة المعادلة)

في هذه الدرس نستخدم اربع خطوات للحل وهي أفهم، خطط، حل، تحقق

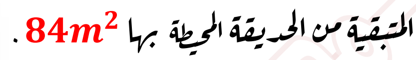


مثال حل المسائل التالية باستراتيجية (كتابة المعادلة)؟

❶ **حديقة فندق**: زُرعت منطقة مربعة الشكل طول ضلعها $4m$ بالورود وسط حديقة فندق مربعة الشكل. فكانت مساحة المنطقة المتبقية من الحديقة المحيطة بها $84m^2$. ماطول ضلع الحديقة؟

افهم ما معطيات المسألة؟ زُرعت منطقة مربعة الشكل طول ضلعها $4m$ بالورود وسط حديقة فندق مربعة الشكل. فكانت مساحة المنطقة المتبقية من الحديقة المحيطة بها $84m^2$.

ما المطلوب من المسألة؟ ماطول ضلع الحديقة؟





خطط كيف تحل المسألة؟ نكتب معادلة تمثل المسألة ثم نجد طول ضلع الحديقة الكلية.

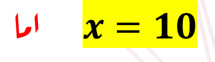
حل نفرض طول ضلع الحديقة $= x$ فتكون مساحة حديقة الفندق $= x^2$ لانها مربعة

مساحة الحديقة المربعة = مساحة حديقة الورود + المساحة المتبقية

$$x^2 = (4)^2 + 84$$

$$x^2 = 16 + 84 \overset{نجمع}{\Rightarrow} x^2 = 100 \xrightarrow{جذر الطرفين} \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{100} \overset{نبسط}{\Rightarrow} x = \pm 10$$

اما $x = 10$ او $x = -10$ تهمل



∴ طول ضلع الحديقة هو $x = 10m$



تحقق مساحة الحديقة الكلية هي $100m$ زرعت منها $16m$ حديقة ورود

$$100 - 16 = 84$$

لذا الحل صحيح لان المساحة المتبقية $84m$



❷ **اسد بابل**: وهو تمثال عثر عليه في مدينة بابل الاثرية في العراق في سنة 1776 وهو مصنوع من حجر البازلت الاسود الصلب وموضوع على منصة منصف منطقة مستطيلة الشكل طولها يزيد على عرضها بمقدار $2m$. ومساحتها $15m^2$. فما ابعادها؟

افهم ما معطيات المسألة؟ تمثال موضوع على منصة مستطيلة طولها يزيد على عرضها بمقدار $2m$. ومساحتها $15m^2$



ما المطلوب من المسألة؟ ماهي ابعاد المنصة؟

خطط كيف تحل المسألة؟ اكتب معادلة تمثل المسألة ثم نجد الطول والعرض.

حل نفرض العرض $= x$ فيكون الطول $= x + 2$

مساحة المنصة المستطيلة $=$ (الطول) (العرض)

$$x(x+2) = 15$$

نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المميز عدد مربع وموجب

$$x^2 + 2x = 15 \overset{\text{نحول}}{\Rightarrow} x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (x+5)(x-3) = 0$$

اما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ او $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ تهمل

∴ العرض هو $x = 3m$ فيكون الطول $3 + 2 = 5m$





تحقق

∵ العرض هو $3m$ و الطول $5m$

المساحة $= 5 \times 3 = 15m^2$

لذا الحل صحيح لان المساحة في السؤال هي $15m^2$ ✓



③ **الأسد**: وهو من اقوى الحيوانات الموجوده على وجه الارض ويلقب الاسد بملك الغابة نسبه الى قوته بين الحيوانات في الغابة . اذا كانت $x^2 - 30x$ تمثل المساحة التي يبسط الاسد سيطرته عليها بالكيلو متر. ماطول ضلع المنطقة التي يمثلها المتغير x اذا كانت المساحة 175 كيلو متر مربع

افهم ما معطيات المسألة؟ $x^2 - 30x$ تمثل المساحة التي يبسط الاسد سيطرته عليها و مقدارها 175 كيلو متر مربع

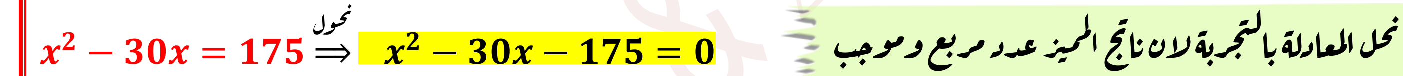
ما المطلوب من المسألة؟ ماطول ضلع المنطقة؟



خطط كيف تحل المسألة؟ اكتب معادلة تمثل المسألة ثم نجد طول ضلع المنطقة.

حل مقدار المساحة هو $x^2 - 30x$ و قيمة المساحة هو 175 كيلو متر مربع فتكون لدينا المعادلة ادناه

نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المميز عدد مربع وموجب



$$x^2 - 30x = 175 \overset{نحول}{\Rightarrow} x^2 - 30x - 175 = 0$$

$$x^2 - 30x - 175 = 0 \overset{بالتجربة}{\Longrightarrow} (x - 35)(x + 5) = 0$$

اما $x - 35 = 0 \Rightarrow x = 35$ او $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ تهمل

$\therefore$ طول ضلع المنطقة هو $x = 35\ km$

تحقيق



نعوض $x = 35$ في المعادلة $x^2 - 30x = 175$

$(35)^2 - 30(35) = 175$

$1225 - 1050 = 175$

$175 = 175$



لذا الحل صحيح



4 **العاب نارية**: في احدى المناسبات أطلقت مجموعة من الالعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت الى ارتفاع $200m$. احسب الزمن الذي وصلت به الى هذه الارتفاع ؟ اذا كانت المعادلة $2t^2 + 30t = h$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالامتار (h) الذي تصل الية الالعاب النارية بعد t ثانية.



ما معطيات المسألة؟ اذا كانت المعادلة $2t^2 + 30t = h$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالامتار.

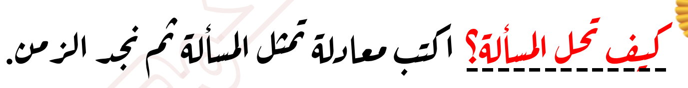
الذي تصل الية الالعاب النارية بعد t ثانية .



ما المطلوب من المسألة؟ احسب الزمن الذي وصلت به الى ارتفاع $200m$ ؟



كيف تحل المسألة؟ اكتب معادلة تمثل المسألة ثم نجد الزمن.



حل

$2t^2 + 30t = h$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالامتار والارتفاع h هو $200m$ فستكون لدينا المعادلة ادناة

$2t^2 + 30t = 200 \overset{\text{نحول}}{\Rightarrow} [2t^2 + 30t - 200 = 0] \div 2 \Rightarrow t^2 + 15t - 100 = 0$

نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المميز عدد مربع وموجب

$t^2 + 15t - 100 = 0 \overset{\text{بالتجربة}}{\Longrightarrow} (t + 20)(t - 5) = 0$

اما $t + 20 = 0 \Rightarrow t = -20$ تهمل او $t - 5 = 0 \Rightarrow t = 5$

$\therefore$ الزمن هو ثانية $t = 5$



تحقيق

نعوض $t = 5$ في المعادلة $2t^2 + 30t = 200$

$2(5)^2 + 30(5) = 200$

$50 + 150 = 200$

$200 = 200$



لذا الحل صحيح

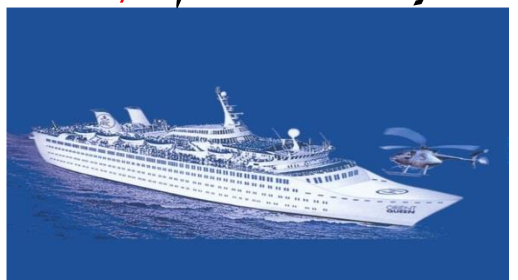


مصطفى محمد ► صفاء الكلابي



❺ **باخرة**: تقطع باخرة شحن مسافة $240km$ بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة ولو زادت سرعتها $10\ km/h$ لتمكنت من قطع المسافة بزمن يقل ساعتين عن الزمن الاول . جد السرعة الاولى للباخرة ؟

افهم ما معطيات المسألة؟ باخرة شحن مسافة $240km$ بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة ولو زادت سرعتها $10\ km/h$ لتمكنت من قطع المسافة بزمن يقل ساعتين عن الزمن الاول.



ما المطلوب من المسألة؟ جد السرعة الاولى للباخرة ؟

خطط كيف تحل المسألة؟ اكتب معادلة تمثل المسألة ثم نجد السرعة الاولى.

حل نفرض السرعة الاولى $= x$ فيكون الزمن الاول $= \frac{240}{x}$ و السرعة الثانية $= x + 10$ فيكون الزمن الثاني $= \frac{240}{x+10}$

نكون المعادلة من خلال فرق الزمن الاول عن الزمن الثاني ساعتين

$2 =$ الزمن الاول $-$ الزمن الثاني

تتخلص من المقامات بضرب المعادلة ب $L.C.M = x(x+10)$

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+10} = 2$$

$$x(x+10)\left(\frac{240}{x}\right) - x(x+10)\left(\frac{240}{x+10}\right) = x(x+10)(2)$$

$$240(x+10) - 240x = 2x(x+10) \xrightarrow{\text{نفتح الاقواس}} 240x + 2400 - 240x = 2x^2 + 20x \xrightarrow{\text{نحول الطرف الاول}}$$

$$[2x^2 + 20x - 2400 = 0] \div 2 \Rightarrow x^2 + 10x - 1200 = 0$$

نحل المعادلة بالتجربة لان ناتج المقدار المميز يساوي 4900 وهو عدد موجب و مربع

$$x^2 + 10x - 1200 = 0 \xrightarrow{\text{بالتجربة}} (x+40)(x-30) = 0$$

اما $x + 40 = 0 \Rightarrow x = -40$ يهمل

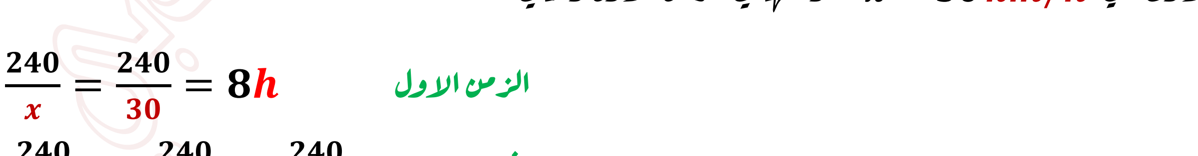
او $x - 30 = 0 \Rightarrow x = 30$

∴ السرعة الاولى هي $x = 30\ km/h$

تحقيق ∵ السرعة الاولى هي $x = 30\ km/h$ نعوضها في الزمن الاول والثاني

$\frac{240}{x} = \frac{240}{30} = 8h$ الزمن الاول

$\frac{240}{x+10} = \frac{240}{30+10} = \frac{240}{40} = 6h$ الزمن الثاني



نلاحظ ان الفرق بين الزمن الاول والثاني هو ساعتين $8 - 6 = 2h$ لذا الحل صحيح ✓